

THORSTEN SCHMIDT - APRIL 2023

FINANZMATHEMATIK UND KÜNSTLICHE INTELLIGENZ

Freiburg Seminar

WAS IST ZUFALL?



EINFACHE MODELLE

- Der Würfelwurf - Werte 1,...,6 und Wahrscheinlichkeiten p_1, \dots, p_6
- Was kann man hier ausrechnen ?

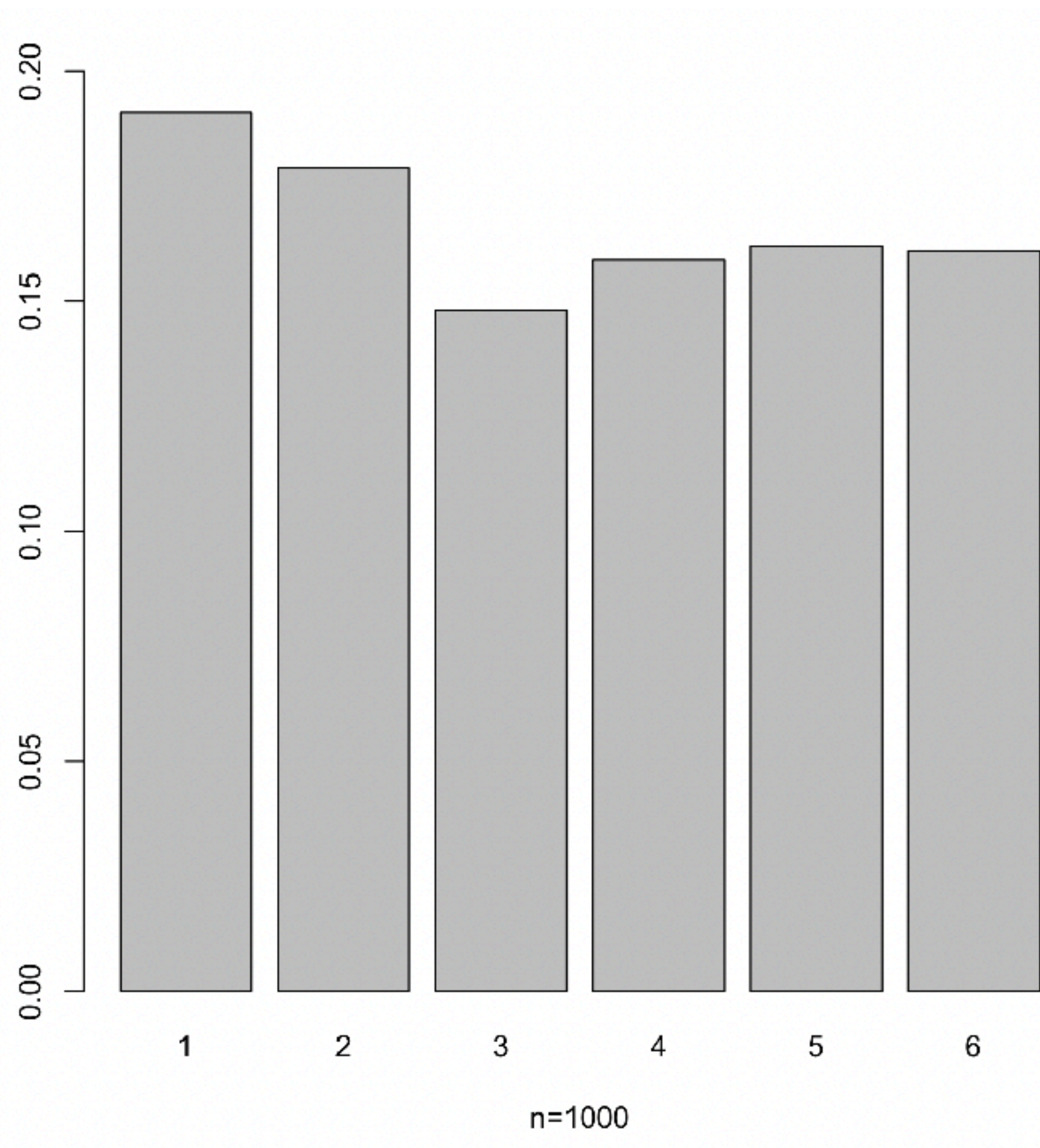
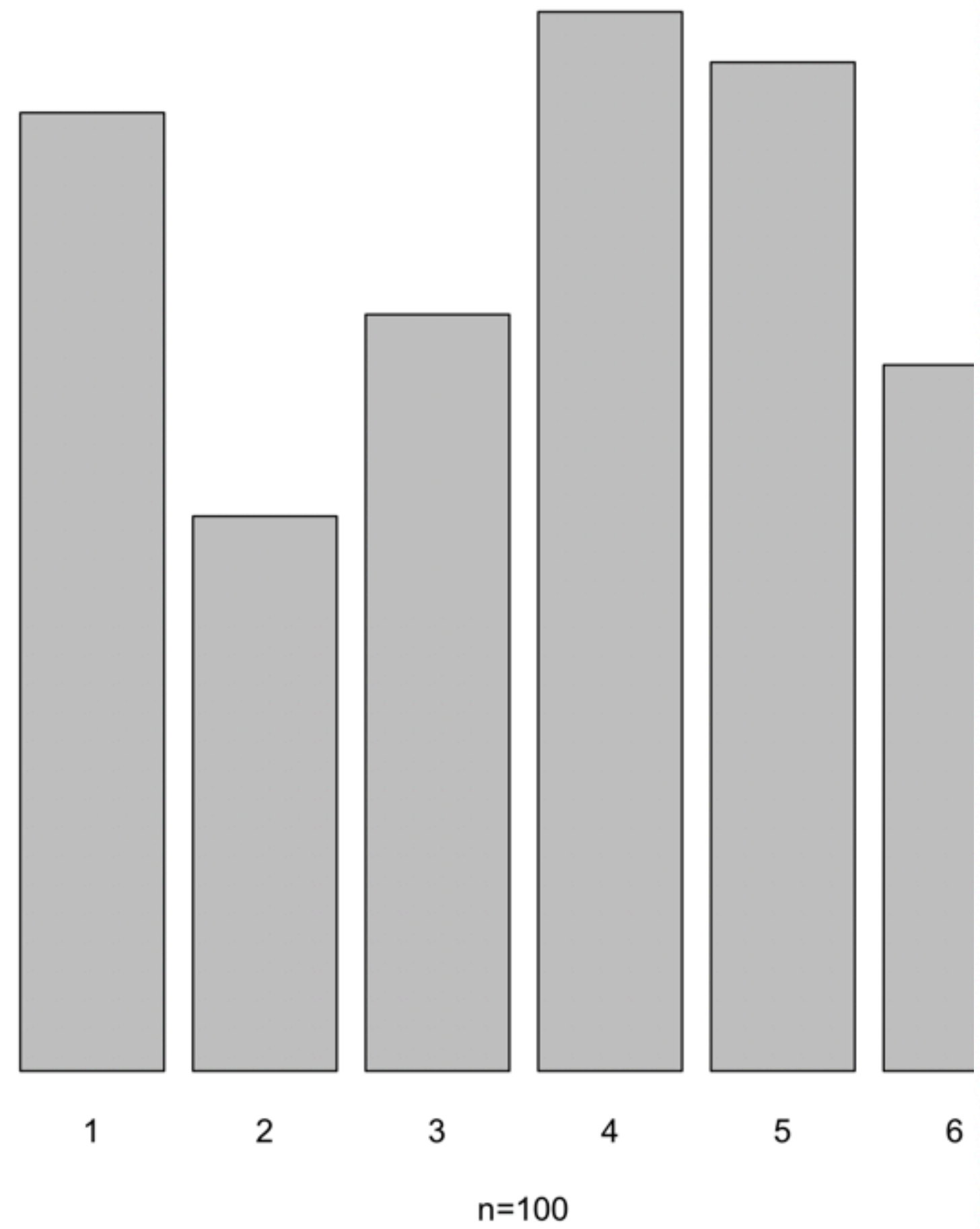
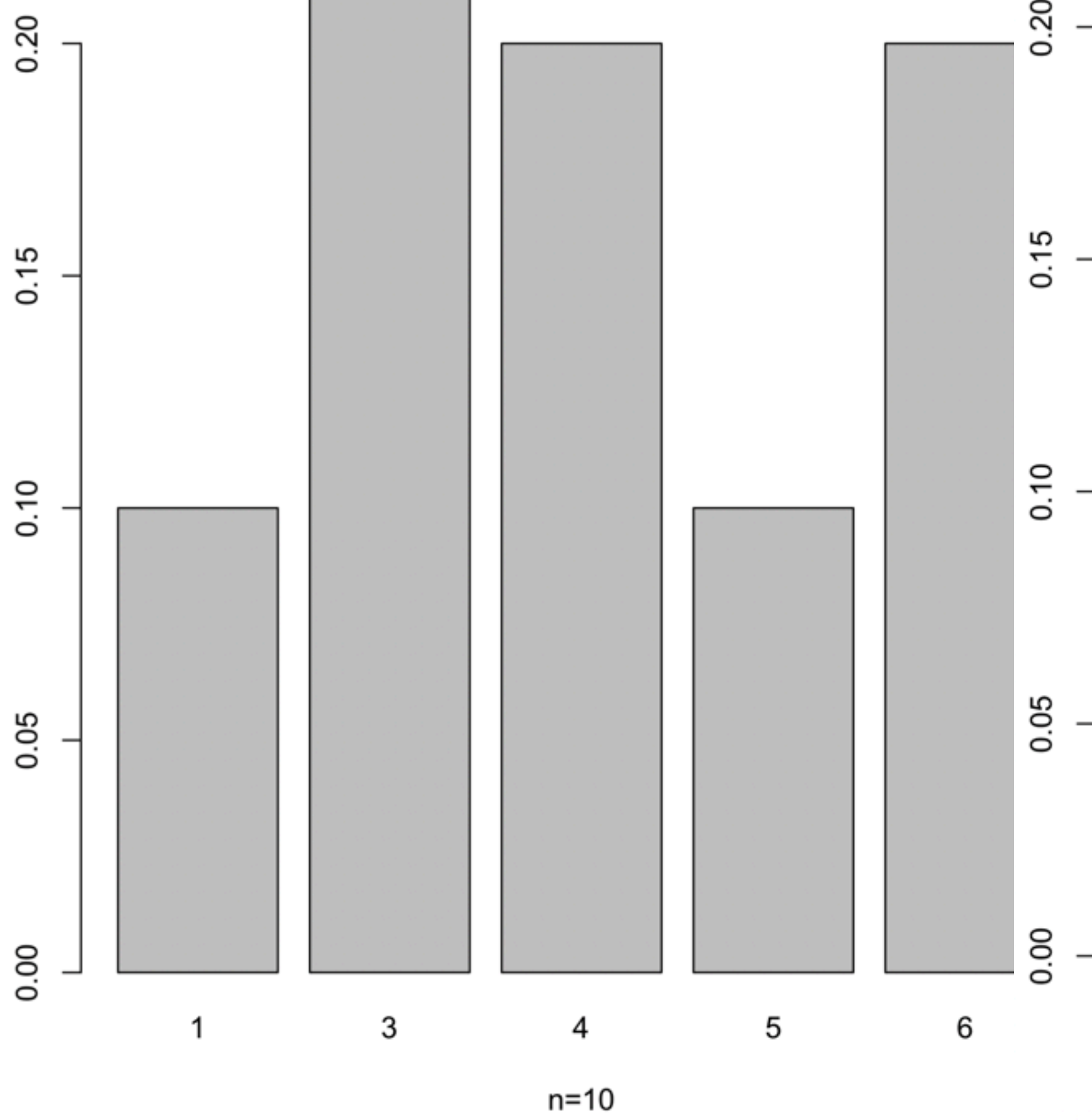
$$E[X] = 1 \cdot p_1 + \dots + 6 \cdot p_6$$

- Was kann man denn damit machen ?

THEOREM: DAS STARKE GESETZ DER GROSSEN ZAHL

- Wiederholt man ein Zufallsexperiment unabhängig
- und notiert die Ergebnisse durch X_1, X_2, \dots
- so konvergiert das arithmetische Mittel gegen den Erwartungswert

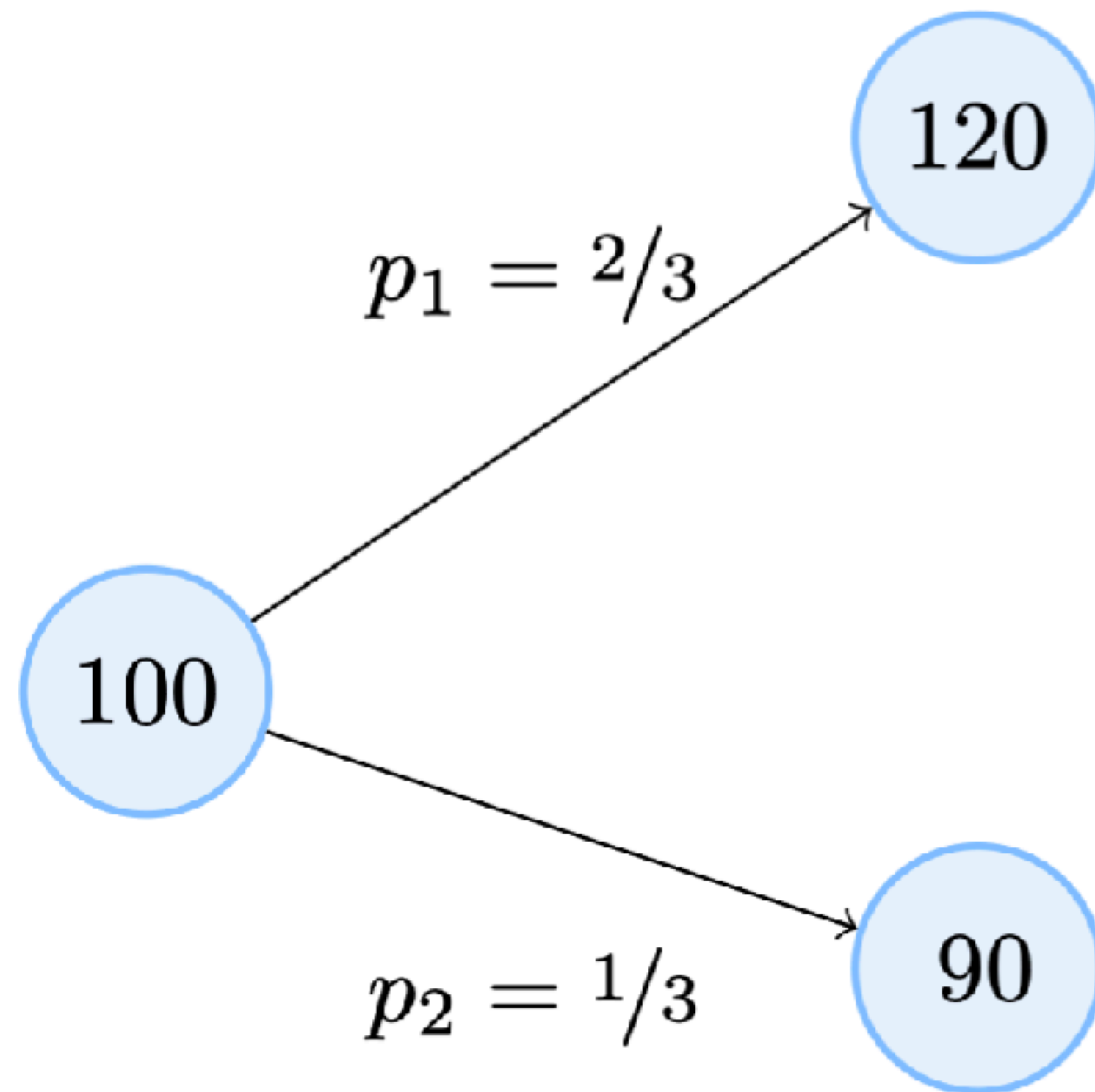
$$\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i \rightarrow E[X_1]$$



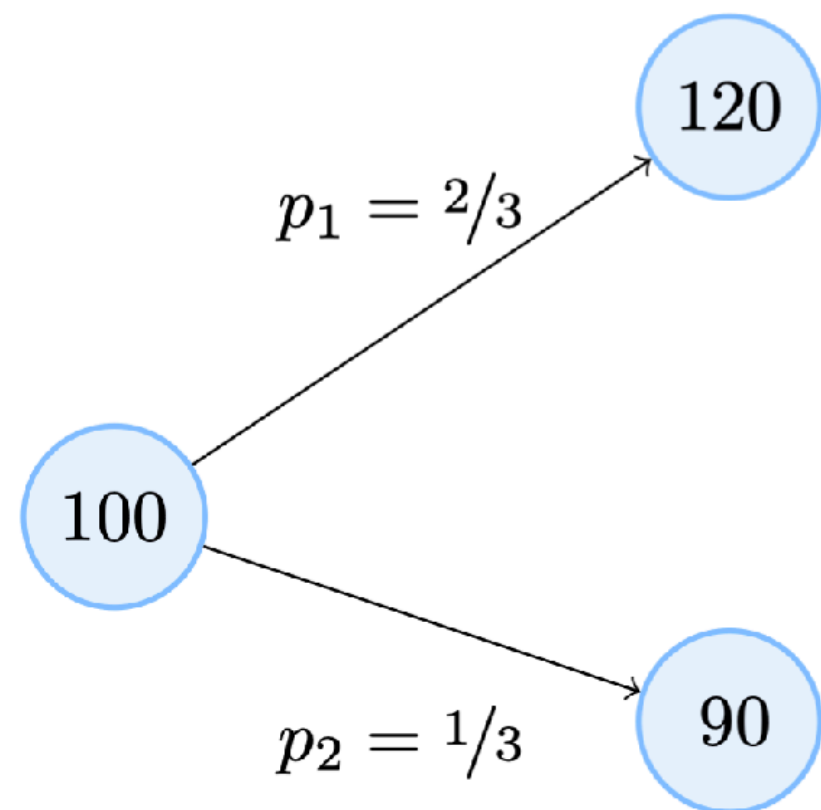
WOFÜR NUTZT MAN ZUFALL?

- Statistische Experimente
(Medizin, Physik, Soziologie,
Ökonomie, etc...)
- Optimale Strategien (Alpha Go)
- Maschine Learning (SGD)
- Uncertainty
- **Hier:** Modellierung von
Aktienkursen

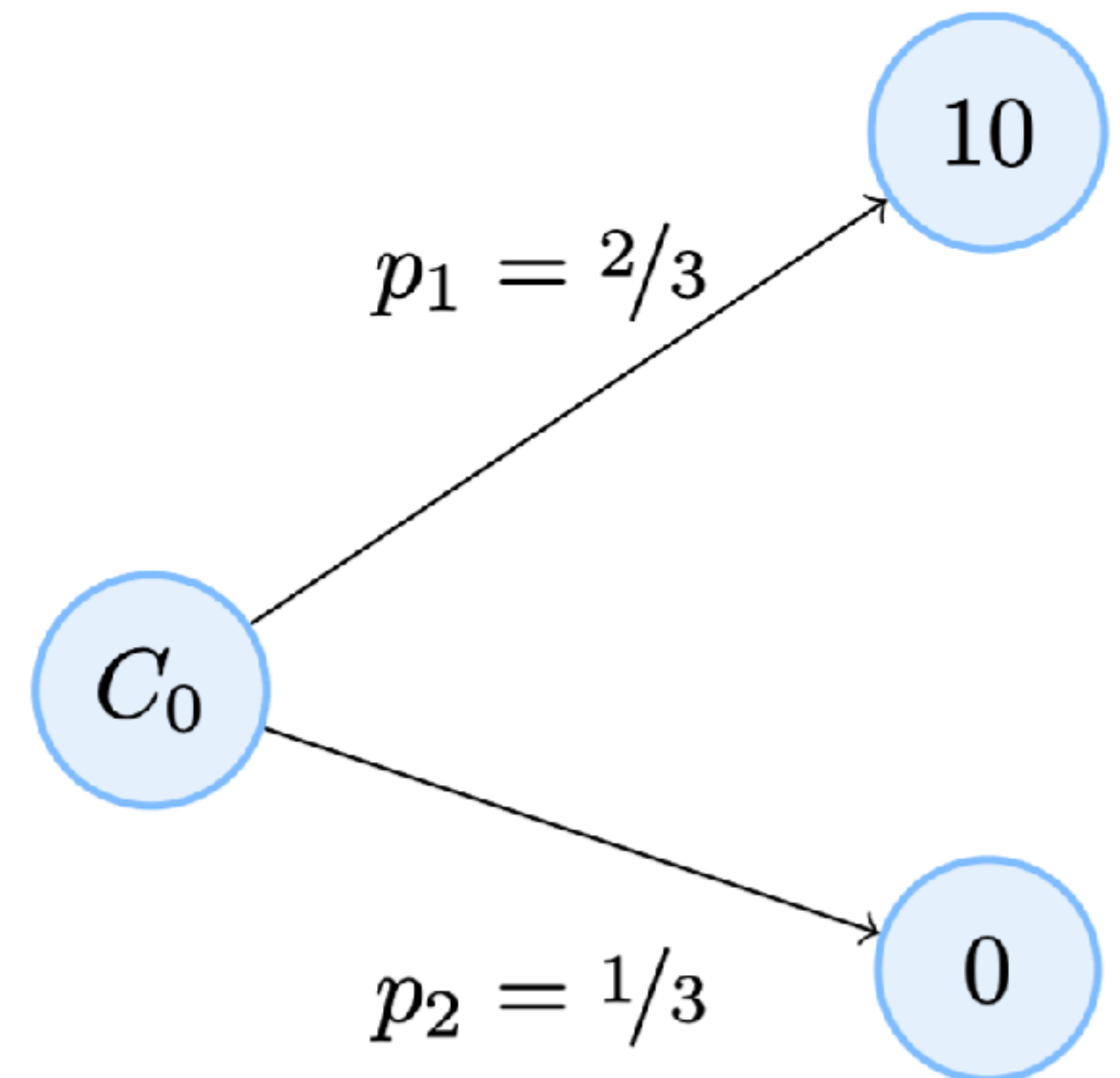
EIN EINFACHES MODELL FÜR EINE AKTIE



NUN GIBT ES NOCH ANDERE PRODUKTE - CALLS UND PUTS



- Um eine Position abzusichern nutzt man Derivate
- Calls sind die Option eine Aktie zu kaufen
- Puts sind die Option eine Aktie
- Wir betrachten einen Call mit $K=100$
- Als bekommen wir 10 (oben) oder 0 (unten)
- Was ist der Preis dieses Calls?



SIE BIETEN DEN CALL FÜR 6,66 EUR AN...

- Was nun ?

IHRE AUFGABE

- Die Call Option C mit Strike 110 besitzt folgendes Auszahlungsprofil (S =Stock ist die Aktie)

$$C = \begin{cases} 10 & \text{falls } S = 120, \\ 0 & \text{falls } S = 90. \end{cases}$$

- Finden Sie einen Betrag x , welchen Sie bei ihrer Bank leihen müssen, und die Anzahl von Aktien y , die Sie besitzen müssen, um die Call Option zu replizieren, d.h. finden Sie x und y derart, dass

$$x + yS = \begin{cases} 10 & \text{falls } S = 120, \\ 0 & \text{falls } S = 90. \end{cases}$$

- Tipp: Sie erhalten durch einsetzen beider Werte in S ein lineares Gleichungssystem für x und y , welches zu einer eindeutigen Lösung führt.

LÖSUNG

Das lineare Gleichungssystem ist gegeben durch

$$x + 120y = 10$$

$$x + 90y = 0$$

Wir subtrahieren die zweite Gleichung von der ersten und erhalten

$$30y = 10 \Rightarrow y = 1/3.$$

Setzen wir nun y in die erste Gleichung ein, so erhalten wir

$$x + 40 = 10 \Rightarrow x = -30.$$

Die Lösung ist somit $(x,y)=(-30,1/3)$.

INTERPRETATION IHRER LÖSUNG

Die gefundene Lösung $(x,y)=(-30,1/3)$ lässt sich nun wie folgt interpretieren:

Zeitpunkt 0

Sie haben 30€ Schulden bei ihrer Bank und besitzen $1/3$ der Aktie im Wert von $100/3=33,33€$. Ihr aktuelles Vermögen beträgt somit $-30€+33,33€=3,33€$.

Zeitpunkt 1

Sie haben immer noch 30€ Schulden bei ihrer Bank und besitzen $1/3$ der Aktie.

Der Wert der Aktie hat sich aber geändert. Für den Wert ihres aktuellen Vermögens gibt es zwei Szenarien

$$-30 + \frac{1}{3}S = \begin{cases} 10 & \text{falls } S = 120, \\ 0 & \text{falls } S = 90. \end{cases}$$

Sie haben mit einem Startkapital von 3,33€ zum Zeitpunkt 0 die Auszahlung der Call Option repliziert. Der richtige Preis zum Zeitpunkt 0 für diese Option beträgt damit 3,33€.

UND WAS SAGT CHATGPT DAZU ?

- Leider ist die Ausführung von ChatGPT zu der Fragestellung zwar sehr nett zu lesen, aber komplett falsch
- Auch sonst gibt es viele gute Vorschläge - aber mit vielen Fehlern. Also: Vorsicht !
- **Sollte KI reguliert werden ?
Wenn ja - wie ?**

SIND MATHEMATIKER AN DER FINANZKRISE SCHULD?

- Dies wird oft diskutiert, aber ...
- Wichtig ist: Sie können helfen, Finanzmärkte sicherer zu machen
- und auch: KI, Versicherungen, Autos, etc ...
- als Mathematiker:in !

Meet the Canadian whose big idea felled Wall Street

Math whiz proposed applying his statistical formula to credit risk, and financial meltdown ensued

$$P_T [\tau_1 < 1, \tau_0 < 1] = \Phi_2(\Phi^{-1}(F_2(1)), \Phi^{-1}(F_0(1)), \gamma)$$

CREDIT RISK

Yves Fassin, University of Waterloo, Canada. David Li, Li's student, kept down the American economy, by just applying the math.

As economists and market watchers can attest, the people in charge of the US market today, Li has worked as a consultant. Recently, Wall Street magazine published Li's work titled "The Formula That Felled Wall Street."

The formula is simple. It is the only one that can predict the future. On the most basic level, the formula allows investors to predict the future of financial markets. Li's work was published in 2007, a year before the financial crisis.

Li's work was published in 2007, a year before the financial crisis. Li's work was published in 2007, a year before the financial crisis.

Li's work was published in 2007, a year before the financial crisis. Li's work was published in 2007, a year before the financial crisis.

Li's work was published in 2007, a year before the financial crisis. Li's work was published in 2007, a year before the financial crisis.

Li's work was published in 2007, a year before the financial crisis. Li's work was published in 2007, a year before the financial crisis.



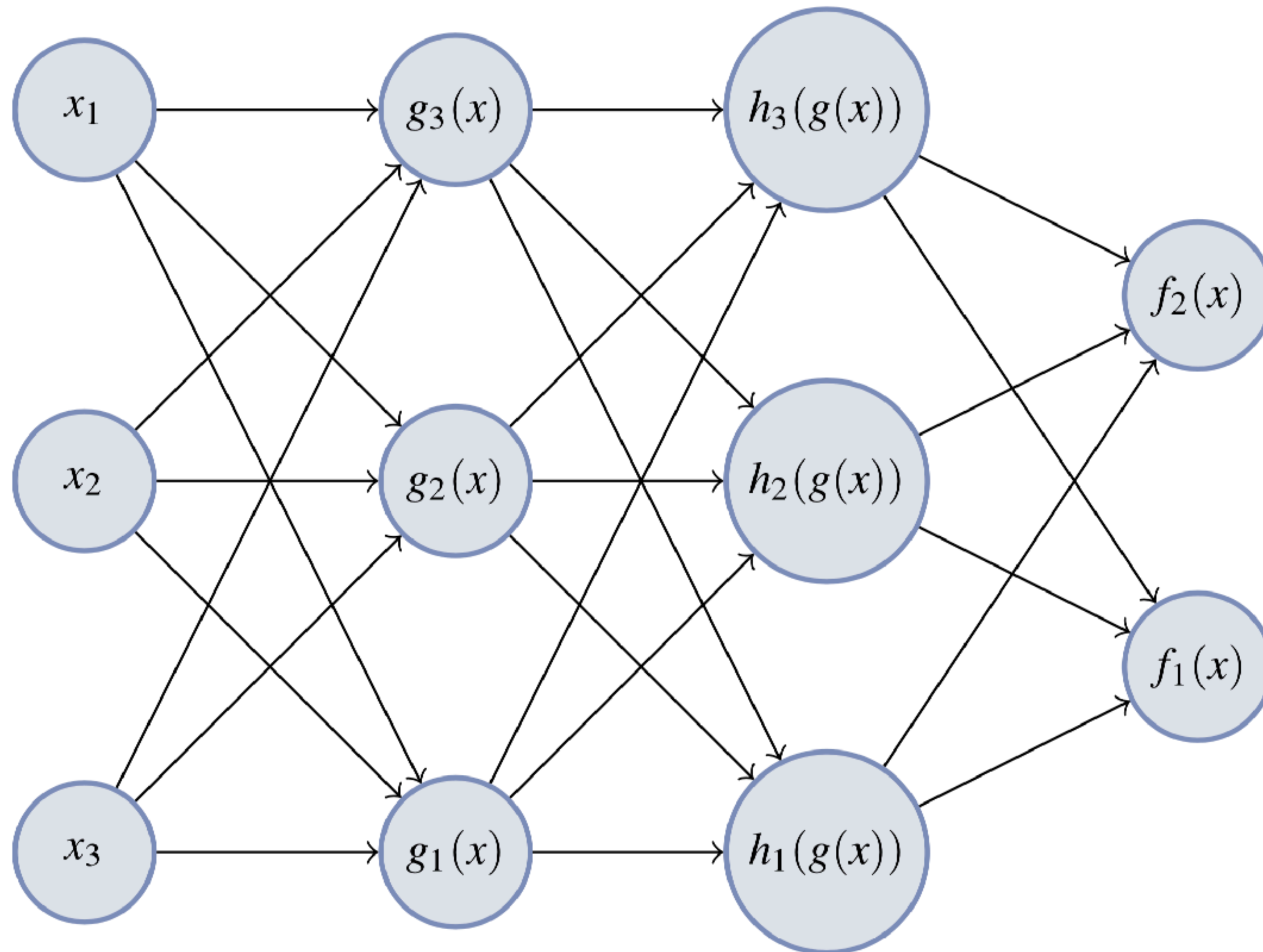
As a student, Li's work was published in 2007, a year before the financial crisis. Li's work was published in 2007, a year before the financial crisis.

MACHINE LEARNING UND KI



Ada Lovelace 1836, Gemälde von Margaret Sarah Carpenter (1793–1872)

WAS IST DENN EIN NEURONALES NETZ?



UNIVERSAL APPROXIMATION THEOREM

- Neuronale Netze haben (selbst mit nur einem Layer) die universelle Approximationseigenschaft:
- Sie können jede beliebige Funktion beliebig nahe approximieren
- Wir können also alle möglichen Funktionen durch neuronale Netze lernen
- Was brauchen wir dafür ?
- Eine Zielfunktion
- Eine Optimierungsmethode

EIN BEISPIEL

- Wir lernen Ziffern zu lesen
- https://colab.research.google.com/drive/1Y4Uf2nGIbm8f3xL4uN8cx_5Oc_2HeyZ?usp=sharing

Videos

Hier sammeln wir Videos aus der Arbeitsgruppe

[Künstliche Intelligenz und Machine Learning](#) [↗](#) (YouTube, von Thorsten Schmidt)

Deep Learning ist in aller Mund und in der Tat eine erstaunliche Technik mit der man u das auch noch mit wenigen Zeilen Code !

- Was sind die Grundlagen und Hintergründe von maschinellem Lernen ?
- Wie kann man einem Computer beibringen handgeschriebenen Ziffern besser zu erkennen hat das auch noch mit Mathematik zu tun ?

Dieses Video gibt einen kurzen Einblick in künstliche Intelligenz und versucht ein bisschen spannenden Technologie zu schauen.

Der Code ist auf [Google Colab](#) [↗](#) verfügbar.

▶ Zum Kommentieren müssen Sie sich anmelden



+ Code + Text

```
ax.imshow(train_images_orig[1], cmap=plt.cm.binary)
ax.set_xticks([])
ax.set_yticks([])
for sp in ax.spines.values():
    sp.set_visible(False)
```

```
plt.subplots_adjust(bottom=0, right=0.4, top=0.2)
plt.show()
```

```
5 0 4 1 9 2 1 3 1 4 3 5 3 6 1 7 2 8
4 0 9 1 1 2 4 3 2 7 3 8 6 9 0 5 6 0
1 8 7 9 3 9 8 5 3 3 0 7 4 9 8 0 9
4 4 6 0 4 5 6 7 0 0 1 7 1 6 3 0 2 1
8 0 2 6 7 8 3 9 0 4 6 7 4 6 8 0 7 8
5 7 1 7 1 1 6 3 0 2 9 3 1 1 0 4 9 2
2 0 2 7 1 8 6 4 1 6 3 4 3 9 1 3 3 8
7 7 4 2 8 5 8 6 7 3 4 6 1 9 9 6 0 3
8 2 9 4 4 6 4 9 7 0 9 2 9 5 1 5 9 1
2 3 5 9 1 7 6 2 8 2 2 5 0 7 4 9 7 8
1 1 8 3 6 1 0 3 1 0 0 1 1 2 7 3 0 4
2 6 4 7 1 8 9 9 3 0 7 1 0 2 0 3 5 4
8 6 3 7 5 8 0 9 1 0 3 1 2 2 3 3 6 4
0 6 2 7 9 8 5 9 2 1 1 4 4 5 6 4 1 2
9 3 9 0 5 9 6 5 7 4 1 3 4 0 4 8 0 4
8 7 6 0 9 7 5 7 2 1 1 6 8 9 4 1 5 2
0 3 9 6 7 2 0 3 5 4 3 6 5 8 9 5 4 7 4 2
1 3 4 8 9 1 9 2 8 7 9 1 8 7 4 1 3 1 1 0
2 3 9 4 9 2 1 6 8 4 7 7 4 4 9 2 5 7 2 4
4 2 1 9 7 2 8 7 6 9 2 2 3 8 1 6 5 1 1 0
```

```
ax.set_yticks([])
for sp in ax.spines.values():
    sp.set_visible(False)
```

```
plt.subplots_adjust(bottom=0, right=0.4, top=0.2)
plt.show()
```

Very clear that this can be improved !

```
2 9 4 6 3 6 8 3 2 1 1 7 8 5 9 5 1 6 0 1
4 7 6 7 4 4 9 1 3 5 8 7 7 8 7 7 8 3 4 2
3 3 7 3 0 7 2 3 4 3 7 5 2 0 8 7 7 0 5 4
7 0 3 0 6 1 2 7 5 1 8 3 0 5 1 9 9 2 7 3 7
3 9 6 9 7 5 3 9 3 3 2 5 7 0 3 1 6 0 8 6
7 7 2 7 0 7 6 4 5 5 1 4 3 7 4 9 1 0 9 8
9 2 1 9 2 2 9 4 3 3 2 5 4 8 2 3 3 4 8 6
4 7 0 7 4 7 3 2 3 7 1 1 1 9 3 1 14 3 7 8 7
7 4 3 8 3 9 3 3 3 3 3 9 3 8 7 2 7 7 0 5
0 9 1 6 0 8 3 3 2 1 1 1 1 5 2 6 3 3 6 8
8 9 8 4 7 7 7 7 9 0 6 2 6 4 5 2 5 9 7 5
```

WIESO SOLLTE MAN MATHEMATIK STUDIEREN ?

UND WIESO IN FREIBURG ?



JProf. Dr. David Criens

- Stochastische Analysis
- Diffusionen und SDEs
- Interagierende Teilchensysteme
- Irrfahrten in zufälliger Umgebung
- Martingalprobleme
- Nichtlineare stochastische Prozesse und nichtlinear Halbgruppen
- (Semilineare) stochastische PDEs



Prof. Dr. Peter Pfaffelhuber

- Stochastische Modelle in den Lebenswissenschaften
- Populationsgenetik
- Chemische Reaktionsnetzwerke
- Markov-Prozesse



Prof. Dr. Angelika Rohde

- Mathematische Statistik Adaptive Inferenz (unter Restriktionen), nichtparametrische Statistik stochastischer Prozesse, Transfer Learning
- Wahrscheinlichkeitstheorie Grenzwertsätze und asymptotische Entwicklungen, Zufallsmatrizen, empirische Prozesse und concentration of measure



Prof. Dr. Thorsten Schmidt

- Finanzmathematik
- Kreditrisiken
- Pricing und Hedging von derivativen Finanzprodukten
- Statistik von stochastischen Prozessen
- Energiemärkte
- Nichtlineare Filtertheorie
- Statistische Anwendungen
- Maschinelles Lernen