Vorkurs Mathematik

für Mathematiker

Universität Freiburg

von Peter Pfaffelhuber

Version: 30. September 2020

Inhaltsverzeichnis

1 Einleitung

Dieses Skript wurde für den Vorkurs Mathematik für Mathematiker, der an der Universität Freiburg vor dem Wintersemester 2019/20 gehalten wurde, erstellt. Wir versuchen hier nicht, durch den gesamten Schulstoff der letzten Jahre des Gymansiums zu gehen, sondern wollen den Übergang von der Schulmathematik zur universitären Mathematik etwas sanfter gestalten. Dies bedeutet, dass wir teilweise Inhalte der Schulmathematik in neues Licht stellen, aber auch neuen Stoff erarbeiten. Kenntnis der Inhalte dieses Vorkurses ist für ein erfolgreiches Mathematik-Studium prinzipiell verzichtbar. Wir hoffen dennoch, bereits in den ersten Tagen an der Universität beim Publikum etwas Ehrgeiz und Begeistung zu wecken.

Natürlich ist die Schulmathematik und die universitäre Mathematik erstmal dieselbe. Andererseits gibt es in der Schulmathematik Begriffe, die in der Universität nicht verwendet werden und andersherum. Als erstes Beispiel sei hier das Gleichheitszeichen $=$ erwähnt. Es dient machmal dazu, eine Aussage zu treffen, etwa $|-1| = 1$ oder $(\sin x)^2 + (\cos x)^2 = 1$ oder $\int_0^1 x dx = \frac{1}{2}$. Manchmal wird durch ein Gleichheitszeichen aber auch etwas definiert. In diesem Fall verwenden wir nun die Schreibweise $:=$ (wobei : auf der Seite des zu definierenden steht). Beispielsweise bedeutet $x := 2$ die Definition einer Variable x mit Zahlwert 2, oder $f(x) := x^2$.

Die universitäre Mathematik ist weitestgehend so aufgebaut, dass alle neuen Begriffe zunächst definiert werden. Deshalb beginnen wir in Kapitel 2 mit mathematischen Grundlagen, insbesondere dem Mengenbegriff. Um den Stil einer mathematischen Vorlesung – im Gegensatz zum Schulunterricht – zu erleben, werden wir uns in Kapitel 3 bekannte Teilbarkeitsregeln neu erarbeiten. Kapitel 4 beschäftigt sich mit einem generellen mathematischen Konzept, das auch schon in der Schule thematisiert wurde. Beim Lösen mathematischer Probleme muss man sich oftmals fragen, ob es überhaupt eine Lösug gibt, ob diese Eindeutig ist, und wenn nicht, wieviele verschiedene Lösungen es gibt. Zuletzt behandeln wir in Kapitel 7 die (aus der Schule bekannte) Exponentialfunktion. Ziel dieses Abschnittes ist es, manchen unzulässigen Analogieschluss aus der Schule aufzudecken.

2 Aussagen und Mengen

Obwohl viele *Mengen* in der Schulmathematik vorkommen, etwa als Definitions-, Werte-, oder Zahlmengen, wird ein Aufbau der Mengenlehre mit *Regeln*, wie mit Mengen umzugehen ist, in der Schule nicht mehr gelehrt. Dies wollen wir in diesem Kapitel nachholen. Kenntnisse über *Aussagen* dienen als Rüstzeug für alles Weitere.

In diesem Abschnitt werden wir noch nicht die später übliche Aufteilung in *Definition*, *Satz* und *Beweis* vornehmen, weil wir mit einem eher intuitiven Verständnis von Aussagen und Mengen arbeiten.

2.1 Aussagen

In der Mathematik werden viele Aussagen getroffen.

Eine Aussage ist eine Feststellung, die *wahr* oder *falsch* sein kann.

Dabei kann eine Aussage eine oder mehrere freie Variable enthalten, muss sie aber nicht. Weiter können Aussagen verknüpft werden. Zunächst ein paar Beispiele.

Beispiel 2.1. Hier sind ein paar Aussagen:

- $\mathcal{A}$: $2^2 = 4$
- $\mathcal{B}(x)$:[1] x ist prim
- $\mathcal{C}(\alpha)$: $(\sin(\alpha))^2 + (\cos(\alpha))^2 = 1$

Hierbei ist $\mathcal{A}$ wahr, $\mathcal{B}(x)$ hängt von der freien Variablen x und $\mathcal{C}(\alpha)$ von der freien Variablen α ab. Keine Aussagen sind z.B. $2 + 4$, $\int_0^1 x dx$ oder $A + B$.

Aussagen können mit $\neg$ negiert, oder mittels $\wedge$ (und), $\vee$ (oder), $\Rightarrow$ (folgt) und $\iff$ (genau dann, wenn) verknüpft werden, so dass neue Aussagen entstehen. Wichtig ist hierbei, dass $(\mathcal{A} \Rightarrow \mathcal{B}) := (\mathcal{B} \vee \neg\mathcal{A})$ definiert ist. Folgende Tabelle fasst noch einmal zusammen.

$\neg$	$\wedge$	$\vee$	$\Rightarrow$	$\iff$
Nicht...	...und...	...oder...	...folgt...	...genau dann, wenn...

Beispiel 2.2.

- $\neg\mathcal{A}$: $2^2 \neq 4$
- $\mathcal{E}(x)$: (x is Primzahl) $\wedge$ $(x > 2)$
- $\mathcal{F}$: $(\alpha = \frac{\pi}{4}) \Rightarrow (\sin(\alpha) = \cos(\alpha))$

Da $\mathcal{A}$ wahr ist, ist $\neg\mathcal{A}$ falsch. Die Aussage $\mathcal{E}(x)$ ist genau dann wahr, wenn x eine ungerade Primzahl ist, und $\mathcal{F}$ ist wahr (und von keiner freien Variablen abhängig).

Beispiel 2.3. Seien $\mathcal{A}, \mathcal{B}$ Aussagen. Gilt $\mathcal{A} \Rightarrow \mathcal{B}$, so heißt $\mathcal{A}$ hinreichend für $\mathcal{B}$, und $\mathcal{B}$ notwendig für $\mathcal{A}$. Hier ein Beispiel für alle $x > 2$

- $\mathcal{A}(x)$: x ist prim,
- $\mathcal{B}(x)$: x ungerade.

Offenbar gilt $\mathcal{A}(x) \Rightarrow \mathcal{B}(x)$. Also ist '$x > 2$ ist eine Primzahl' *hinreichend* für '$x > 2$ ist ungerade'. Andererseits ist '$x > 2$ ist ungerade' notwendig für 'x ist eine Primzahl'. Schließlich sind alle Primzahlen > 2 ungerade.

Sind also $\mathcal{A}, \mathcal{B}$ Aussagen, so ist $\neg A$ genau dann wahr, wenn $\mathcal{A}$ falsch ist. Die Aussage $\mathcal{A} \wedge \mathcal{B}$ ist genau dann wahr, wenn sowohl $\mathcal{A}$ als auch $\mathcal{B}$ wahr sind etc. Solche Zusammenhänge fasst man gerne in einer Wahrheitstabelle zusammen, bei denen "T" für *True* und "F" für *False* steht.

[1] Bekanntermaßen heißt $x \in \mathbb{N}$ prim oder Primzahl, wenn $x > 1$ und x nur durch 1 und sich selbst teilbar ist.

A	T	F
$\neg A$	F	T

A	T	T	F	F
B	T	F	T	F
$A \wedge B$	T	F	F	F
$A \vee B$	T	T	T	F
$A \Rightarrow B$	T	F	T	T
$A \iff B$	T	F	F	T

Dabei sind zwei Aussagen identisch, wenn ihre Wahrheitstabellen übereinstimmen. Sind etwa $\mathcal{A}, \mathcal{B}$ Aussagen, so ist $(\mathcal{A} \wedge \mathcal{B}) = (\mathcal{B} \wedge \mathcal{A})$ und $(\mathcal{A} \vee \mathcal{B}) = (\mathcal{B} \vee \mathcal{A})$. Hier sind zwei weitere Beispiele.

Proposition 2.4. *Seien $\mathcal{A}, \mathcal{B}$ Aussagen. Dann gilt*

$$\mathcal{A} = \neg(\neg\mathcal{A})$$

und wir schreiben auch $\neg\neg\mathcal{A} := \neg(\neg\mathcal{A})$. Weiter gilt

$$(\mathcal{A} \Rightarrow \mathcal{B}) = (\neg\mathcal{B} \Rightarrow \neg\mathcal{A}).$$

Beweis. Die erste Aussage erhält man durch einfaches Einsetzen in die Wahrheitstabelle. Wir setzen die Definition von $\mathcal{A} \Rightarrow \mathcal{B}$ und die erste Aussage ein und erhalten

$$(\mathcal{A} \Rightarrow \mathcal{B}) = (\mathcal{B} \vee \neg\mathcal{A}) = (\neg\neg\mathcal{B} \vee \neg\mathcal{A}) = (\neg\mathcal{A} \vee \neg(\neg\mathcal{B})) = (\neg\mathcal{B} \Rightarrow \neg\mathcal{A}).$$

□

Die zweite Aussage der Proposition benötigt man in der Tat sehr oft. Will man nämlich $\mathcal{A} \Rightarrow \mathcal{B}$ beweisen, so kann man genausogut $\neg\mathcal{B} \Rightarrow \neg\mathcal{A}$ zeigen. Dies veranschaulichen wir an einem Beispiel. Zunächst benötigen wir eine Hilfsaussage[2].

Lemma 2.5. *Sei $x \in \mathbb{N}$. Dann ist x^2 genau dann gerade, wenn x gerade ist.*

Beweis. Ist x gerade, so ist $x = 2a$ für $a = x/2 \in \mathbb{N}$. Dann ist $x^2 = 4a^2$, also auch gerade. Es bleibt zu zeigen, dass

$$x^2 \text{ gerade} \Rightarrow x \text{ gerade}.$$

Da $(\mathcal{A} \Rightarrow \mathcal{B}) = (\neg\mathcal{B} \Rightarrow \neg\mathcal{A})$, ist dies äquivalent zu der Behauptung

$$x \text{ ungerade} \Rightarrow x^2 \text{ ungerade}.$$

Ist nun x ungerade, so ist in der Dezimaldarstellung von x die Einer-Ziffer eine 1, 3, 5, 7 oder 9. Entsprechend muss die Einer-Ziffer der Dezimaldarstellung von x^2 eine 1, 9, 5, 9 oder 1 sein. Insbesondere ist x^2 ungerade und die Behauptung ist gezeigt. □

Wir kommen nun zu einer Tatsache, die bereits aus der Schule bekannt ist.

Proposition 2.6. *Es gilt*

$$\sqrt{2} \notin \mathbb{Q}.$$

[2]Ein Hilfssatz wird auch *Lemma* genannt.

Beweis. Klar ist, dass $(x = \sqrt{2}) \Rightarrow (x^2 = 2)$. Es genügt also, die Behauptung

$$x^2 = 2 \Rightarrow x \notin \mathbb{Q}. \tag{1}$$

zu zeigen. Dies ist äquivalent zu

$$x \in \mathbb{Q} \Rightarrow x^2 \neq 2. \tag{2}$$

Sei $x \in \mathbb{Q}$. Dann gibt es $p \in \mathbb{Z}$ und $q \in \mathbb{N}$ mit $x = \frac{p}{q}$. Wir können annehmen, dass p und q teilerfremd sind. Sind sie es nicht, so können wir durch die gemeinsamen Teiler nämlich kürzen. Also ist $x^2q^2 = p^2$.
Wir zeigen nun für $x, p, q \in \mathbb{N}$ mit $x^2q^2 = p^2$:

$$p, q \text{ teilerfremd } \Rightarrow x^2 \neq 2. \tag{3}$$

Wir verwenden denselben Trick wie oben und zeigen stattdessen die äquivalente Aussage

$$x^2 = 2 \Rightarrow p, q \text{ nicht teilerfremd.} \tag{4}$$

Gilt $x^2 = 2$, so folgt erstmal $2q^2 = p^2$. Insbesondere ist p^2 gerade, also ist auch p nach Lemma 2.5 gerade. Sei also a so, dass $2a = p$. Damit ist $4a^2 = 2q^2$, also $2a^2 = q^2$. Damit ist nun q^2, nach Lemma 2.5 ist also auch q gerade. Insbesondere sind p und q nicht teilerfremd, da 2 beide Zahlen teilt. Damit haben wir (4) gezeigt, was äquivalent zu (3) ist. Da wir die Voraussetzungen von (3) aus (2) gefolgert haben, gilt damit auch (2), was äquivalent zu (1) ist und $\sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$ ist gezeigt. □

2.2 Quantoren

Aus Aussagen, die von einer freien Variablen abhängen, weitere Aussagen zu machen, stehen folgende Quantoren zur Verfügung, die in der Schule nicht verwendet wurden:

$\exists$	$\exists!$	$\forall$
Es existiert...	Es existiert genau ein...	Für alle...

Für diese Quantoren benötigt man immer eine Grundmenge an möglichen Objekten, aus denen ausgewählt werden kann, beispielsweise natürliche oder reelle Zahlen.

Beispiel 2.7 (Quantoren).

- $\mathcal{A}$: $\exists y \in \mathbb{N} : y$ ist prim
- $\mathcal{B}$: $\forall y \in \mathbb{N}$ prim $\exists z \in \mathbb{N} : ((z > y) \wedge (z \text{ prim}))$
- $\mathcal{C}$: $\exists! x \in \mathbb{R} : x^2 = 2.$

Hier sind $\mathcal{A}$ und $\mathcal{B}$ wahr, $\mathcal{C}$ falsch (da sowohl $\sqrt{2}$ and auch $-\sqrt{2}$ die gesuchte Eigenschaft besitzen). Wichtig ist es, einzusehen, dass $\mathcal{A}, \mathcal{B}, \mathcal{C}$ von keiner freien Variablen abhängen, jedoch $(\exists z \in \mathbb{N} : z > y$ und z prim$)$ von der freien Variablen y.

Nun können wir Negation, Verknüpfungen und Quantoren kombinieren. Es entstehen dabei viele Aussagen, die alle intuitiv verstanden werden können. Hier ein paar Beispiele:
Sei $\mathcal{A}(x)$ eine Aussage, die von der freien Variablen x abhängt. Dann gilt:

$$(\neg(\exists x : \mathcal{A}(x))) = (\forall x : \neg\mathcal{A}(x)),$$
$$(\neg(\forall x : \mathcal{A}(x))) = (\exists x : \neg\mathcal{A}(x)).$$

Sei $\mathcal{B}(x, y)$ eine Aussage, die von den freien Variablen x und y abhängt. Dann gilt

$$(\exists x \exists y : \mathcal{B}(x, y)) = (\exists y \exists x : \mathcal{B}(x, y)),$$
$$(\forall x \forall y : \mathcal{B}(x, y)) = (\forall y \forall x : \mathcal{B}(x, y)).$$

Wir schreiben deshalb auch vereinfachend für diese beiden Aussagen

$$\exists x, y : \mathcal{B}(x, y),$$
$$\forall x, y : \mathcal{B}(x, y).$$

Weitere Beispiele gibt es in den Übungen.

2.3 Mengen

Wir folgen hier einem naiven Mengenbegriff[3], der auf Cantor zurückgeht.

> Eine Menge ist eine Zusammenfassung bestimmter, wohlunterschiedener Objekte unserer Anschauung oder unseres Denkens zu einem Ganzen.

Mitglieder einer Menge heißen auch *Elemente* der Menge. Aus der Schule sind Zahlmengen bekannt, die wir nun kurz wiederholen.

Symbol	Definition	Bezeichnung
$\mathbb{N}$	$:= \{1, 2, ...\}$	natürliche Zahlen
$\mathbb{Z}$	$:= \{0, \pm 1, \pm 2\}$	ganze Zahlen
$\mathbb{Z}_+ := \mathbb{N}_0$	$:= \{0, 1, 2, ...\}$	natürliche Zahlen mit 0
$\mathbb{Q}$	$:= \left\{\frac{p}{q} : p \in \mathbb{Z}, q \in \mathbb{N}\right\}$	Brüche
$\mathbb{R}$	Inhalt der Vorlesung Analysis 1	reelle Zahlen
$\mathbb{C}$	Inhalt der Vorlesung Analysis 2	komplexe Zahlen

Es gibt zwei Möglichkeiten, Mengen zu notieren. Gerade bei endlichen Mengen, d.h. Mengen mit endlich vielen Elementen, wählt man oft eine Aufzählung, etwa

$$A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}.$$

[3]Die Vorlesung *Mengenlehre* geht hier deutlich weiter, und definiert Mengen axiomatisch.

Die Aufzählung von Elementen kann man auch (wie etwa bei den natürlichen Zahlen) bei unendlichen Mengen machen, wenn man ... verwendet. Hier besteht allerdings die Gefahr der Missinterpretation. Eine andere Möglichkeit ist es, eine Aussage $\mathcal{B}(x)$ zu verwenden, die von einer freien Variablen abhängt, und dann

$$B = \{x : \mathcal{B}(x)\} := \{x : \mathcal{B}(x) \text{ ist wahr}\}$$

zu schreiben. Wir führen einige Schreibweisen ein. Seien A, B Mengen.

1. Ist x ein *Element* von A, schreiben wir $x \in A$. Ist x kein Element von A, schreiben wir $x \notin A$.

2. Die Menge, die kein Element enthält, wird mit $\emptyset$ notiert und *leere Menge* genannt. (D.h. es gilt $(\forall x : x \notin \emptyset)$.)

3. Ist jedes Element von A auch Element von B, gilt also $(x \in A) \Rightarrow (x \in B)$, so schreiben wir $A \subseteq B$ und sagen, A ist eine Teilmenge von B. Gibt es darüberhinaus ein x mit $x \in B$ und $x \notin A$ (d.h. es gilt $(\exists x \in B : x \notin A)$, schreiben wir manchmal $A \subsetneq B$ und sagen, A ist eine echte Teilmenge von B.

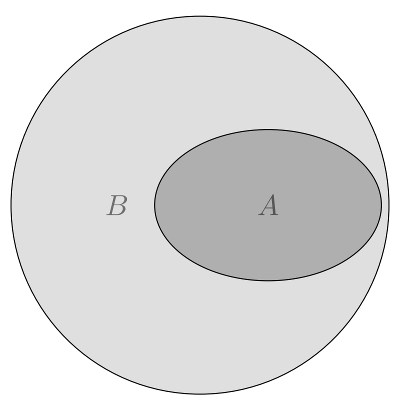
Aus der Schule bekannt ist

$$\mathbb{N} \subsetneq \mathbb{N}_0 \subsetneq \mathbb{Z} \subsetneq \mathbb{Q} \subsetneq \mathbb{R}.$$

Ein anderes Beispiel ist

$$\{\Delta \text{ gleichseitiges Dreieck}\} \subseteq \{\Delta \text{ gleichschenkliges Dreieck}\}.$$

Mengen und deren Zusammenhang kann man mit Venn-Diagrammen darstellen. Hier steht ein Kreis oder ein anderes abgeschlossenen Gebiet für eine Menge. Will man etwa $A \subsetneq B$ darstellen, sieht das so aus.



Hier ein paar Rechenregeln für Teilmengen. Seien A, B, C Mengen.

1. Es gilt $A \subseteq A$.

2. Aus $A \subseteq B$ und $B \subseteq C$ folgt $A \subseteq C$.

3. Es gilt $A = B$ genau dann, wenn $A \subseteq B$ und $B \subseteq A$.

Wie auch bei Aussagen kann man aus Mengen neue Mengen machen. Wir führen nun die entsprechende Notation ein. Seien hier A und B Mengen.

1. Mit A^c bezeichnen wie die Menge der Elemente, die nicht in A enthalten sind. Diese Menge heißt *Komplementmenge* von A.

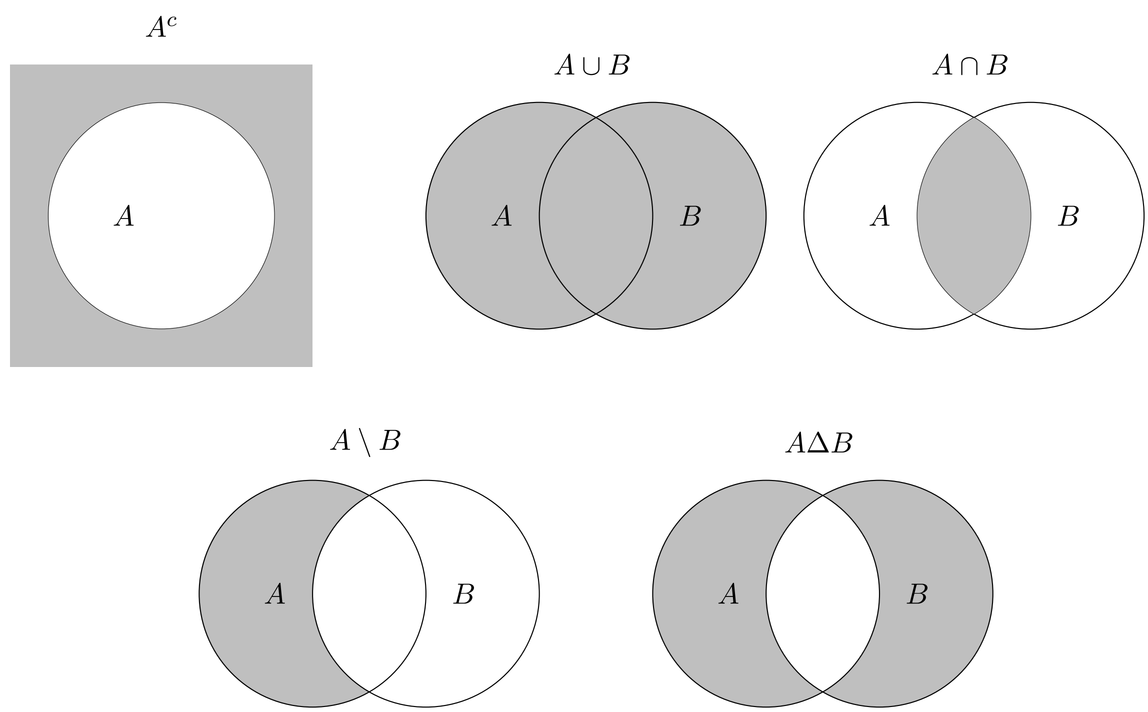
2. Mit $A \cup B$ bezeichnen wir die Menge, die sowohl die Elemente von A als auch die von B enthält. Diese Menge heißt *Vereinigungsmenge* von A und B.

3. Mit $A \cap B$ bezeichnen wir die Menge der Elemente aus A, die auch in B enthalten sind. Diese Menge heißt *Schnittmenge* von A und B.

4. Mit $A \setminus B$ bezeichnen wir die Menge der Elemente aus A, die nicht in B enthalten sind, also $A \setminus B := A \cap B^c$. Diese Menge heißt *Differenzmenge* von A und B.

5. Mit $A \Delta B := (A \setminus B) \cup (B \setminus A)$ bezeichnen wir die *symmetrische Differenz* von A und B.

Wir verdeutlichen die Schreibweisen wieder mit Venn-Diagrammen.



Es gibt nun einige Rechenregeln, die man sich mit Hilfe von Venn-Diagrammen leicht verdeutlichen kann. Seien hierzu A, B, C Mengen.

1. Es gilt $(A^c)^c = A$.

2. Es gelten die *de Morganschen Gesetze*

$$(A \cap B)^c = A^c \cup B^c \text{ und } (A \cup B)^c = A^c \cap B^c.$$

3. Es gelten die *Assoziativgesetze*

$$(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C) \text{ und } (A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C).$$

4. Es gelten die *Distributivgesetze*

$$A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C) \text{ und } A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C).$$

Aus der analytischen Geometrie sind Vektoren bekannt. Diese sind Elemente von Produktmengen, die wir nun einführen.

Definition 2.8 (Produktmenge). *Sind $A_1, ..., A_n$ Mengen. Dann bezeichnet*

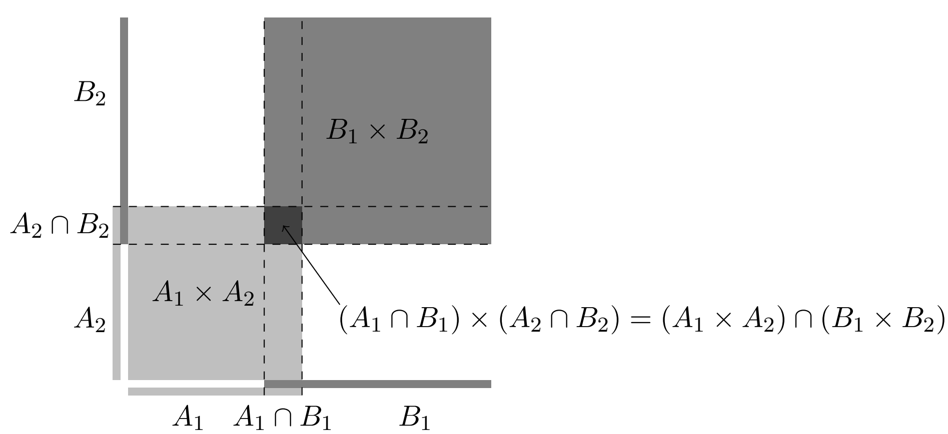
$$A_1 \times \cdots \times A_n := \{(x_1, ..., x_n) : x_1 \in A_1, ..., x_n \in A_n\}$$

die Produktmenge *von $A_1, ..., A_n$. Ist $A = A_1 = \cdots = A_n$, so schreiben wir auch $A^n := A_1 \times \cdots \times A_n$. Wir nennen Elemente von A^n auch A-wertige (n-dimensionale)* Vektoren.

Sind $A_1, ..., A_n, B_1, ..., B_n$ Mengen. Dann gilt

$$(A_1 \times \cdots \times A_n) \cap (B_1 \times \cdots \times B_n) = (A_1 \cap B_1) \times \cdots \times (A_n \cap B_n).$$

Dies verdeutlichen wir am besten an einer Grafik (für $n = 2$):



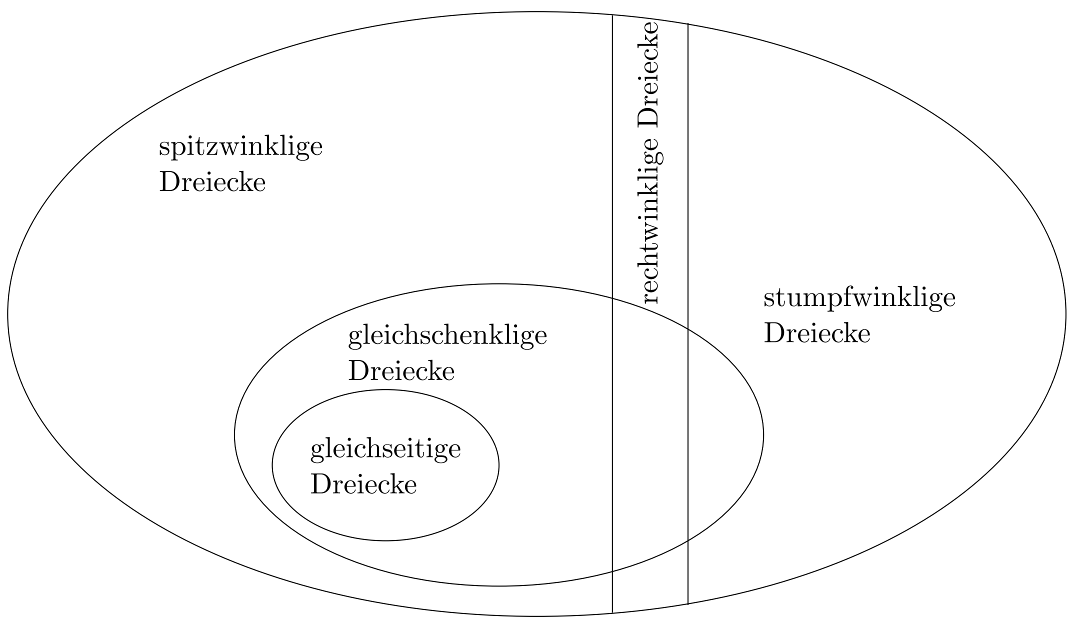
Wie man allerdings unschwer erkennt, ist

$$(A_1 \times A_2) \cup (B_1 \times B_2) \neq (A_1 \cup B_1) \times (A_2 \cap B_2).$$

Zum Abschluss dieses Kapitels vertiefen nun noch den Zusammenhang zwischen Aussagen und Mengen. Seien $\mathcal{A}(x)$ und $\mathcal{B}(x)$ Aussagen, die von der freien Variablen x abhängen, sowie $A := \{x : \mathcal{A}(x)\}$ und $B := \{x : \mathcal{B}(x)\}$.

1. Es gilt $A^c := \{x : \neg\mathcal{A}(x)\}$.
2. Es gilt $A \cap B := \{x : \mathcal{A}(x) \wedge \mathcal{B}(x)\}$ und $A \cup B := \{x : \mathcal{A}(x) \vee \mathcal{B}(x)\}$.
3. Es gilt
$$(\forall x : \mathcal{A}(x) \Rightarrow \mathcal{B}(x)) \iff (A \subseteq B).$$

Beispiel 2.9 (Das Haus der Dreiecke). Zum Abschluss des Kapitels betrachten wir verschiedene speziellen Dreiecke: Gleichseitige Dreiecke, gleichschenklige Dreiecks, rechtwinklige Dreiecke, spitzwinklige Dreiecke und stumpfwinklige Dreiecke[4]. Es ergibt sich folgendes Venn-Diagramm (bei dem nicht alle Gebiete rund sind, manche haben auch Ecken).



3 Teilbarkeitsregeln

Es folgt nun ein Kapitel, in dem wir die Formulierung mathematischer Inhalte mit Hilfe von Aussagen und Quantoren üben wollen. Teilbarkeitsregeln werden im restlichen Mathematik-Studium zwar eine untergeordnete Rolle spielen, sie dienen nur dafür, die neue Form des mathematischen Formulierens und Beweisens an Bekanntes anzuknüpfen.

Aus der Schule ist bekannt, dass eine natürliche Zahl genau durch 3 (bzw. 9) teilbar ist, wenn ihre Quersumme durch 3 (bzw. 9) teilbar ist. Weniger bekannt ist jedoch, warum dies so ist. Wir wollen dies nun formalisieren. Weiter wollen wir Teilbarkeit durch 11 und 7 untersuchen. Als bekannt setzen wir dabei die Dezimaldarstellung einer natürlichen Zahl voraus. Wir notieren diese mit einem Summenzeichen, das wir zunächst einführen.

Definition 3.1 (Summenzeichen). *Seien* $..., x_{-2}, x_{-1}, x_0, x_1, x_2, ... \in \mathbb{R}$. *Es heißt*
$$\sum_{k=m}^{n} x_k := x_m + \cdots + x_n$$

[4]Ein Dreieck ist stumpfwinklig, wenn es einen Winkel über 90° besitzt. Es heißt spitzwinklig, wenn alle Winkel kleiner als 90° sind und rechtwinklig wenn ein Winkel genau 90° ist.

für $m, n \in \mathbb{Z}$ die Summe *von $x_m, ..., x_n$. Für $n < m$ ist dabei $\sum_{k=m}^{n} x_n := 0$. Die Bezeichnung der zu summiernden Variablen (hier k) ist unerheblich, d.h. $\sum_{k=m}^{n} x_k = \sum_{i=m}^{n} x_i$.*

Beispiel 3.2. 1. Die Summe der ersten sechs Quadratzahlen ist

$$\sum_{k=1}^{6} k^2 = 1 + 4 + 9 + 16 + 25 + 36 = 91.$$

2. Es ist

$$\sum_{j=0}^{n} (-1)^j = \begin{cases} 1, & n \text{ gerade}, \\ 0, & n \text{ ungerade}. \end{cases}$$

3.1 Einführung

Nun also zur Dezimaldarstellung natürlicher Zahlen.

Lemma 3.3 (Dezimardarstellung einer natürlichen Zahl). *Sei $x \in \mathbb{N}$. Dann gibt es ein eindeutiges $m \in \mathbb{N}$ sowie $a_0, ..., a_m \in \{0, ..., 9\}$ mit $a_m \neq 0$, so dass*

$$x = a_m 10^m + \cdots + a_0 10^0 = \sum_{k=0}^{m} a_m 10^m.$$

Die Folge $a_m \cdots a_0$ heißt Dezimaldarstellung *von x.*

Beweis. Siehe Aufgabe zu Kapitel 7. □

Definition 3.4 (Teilbarkeit, Quersumme, alternierende Quersumme). *1. Sei $x \in \mathbb{N}$ mit Dezimaldarstellung $x = \sum_{k=0}^{m} a_m 10^m$. Dann heißt $\sum_{k=0}^{m} a_k$* Quersumme *(der Dezimaldarstellung) von x.*

2. Sei $x \in \mathbb{N}$ mit Dezimaldarstellung $x = \sum_{k=0}^{m} a_m 10^m$. Dann heißt $\sum_{k=0}^{m} (-1)^k a_k$ alternierende Quersumme *(der Dezimaldarstellung) von x.*

3. Seien $x, y \in \mathbb{N}$. Wir sagen, y teilt x (oder x ist teilbar durch y), falls es ein $z \in \mathbb{Z}$ gibt mit $yz = x$. In diesem Fall schreiben wir $y|x$. Ist x nicht durch y teilbar, schreiben wir $y \not| x$.

3.2 Teilbarkeit durch 3 und 9

Wir kommen nun zu den bekannten Teilbarkeitsregeln durch 3 und 9.

Proposition 3.5 (Teilbarkeit durch 3 und 9). *Sei $x \in \mathbb{N}$ und $q(x)$ die Quersumme von x. Dann gilt*

$$3|x \qquad \Longleftrightarrow \qquad 3|q(x)$$

und

$$9|x \qquad \Longleftrightarrow \qquad 9|q(x).$$

Beweis. Sei $z \in \mathbb{Z}$. Zunächst stellen wir fest, dass $y|x$ genau dann gilt, wenn $y|(x+yz)$. Schließlich gilt

$$y|x \iff \exists z' \in \mathbb{N} : yz' = x \iff \exists z' \in \mathbb{N} : y(z'+z) = x + yz \iff y|(x+yz).$$

Nun gilt $3|(10^m - 1)$ für jedes $m \in \mathbb{N}$, denn

$$1 + 3\sum_{k=0}^{m-1} 3 \cdot 10^k = 1 + \sum_{k=0}^{m-1} 9 \cdot 10^k = 10^m.$$

Sei nun $x = \sum_{k=0}^{m} a_k 10^k$. Dann gilt

$$3|x \iff 3|\Big(x - \sum_{k=0}^{m} a_k(10^k - 1)\Big) = \sum_{k=0}^{m} a_k \iff 3|q(x).$$

Analog argumentiert man für die zweite Aussage. □

3.3 Teilbarkeit durch 11 und 7

Es folgt nun eine etwas weniger bekannte Aussage.

Proposition 3.6 (Teilbarkeit durch 11). *Sei $x \in \mathbb{N}$ und $s(x)$ die alternierende Quersumme von x. Dann gilt*

$$11|x \iff 11|s(x).$$

Beweis. Der Beweis erfolgt in drei Schritten, d.h. wir zeigen der Reihe nach:

1. Sei m gerade. Dann gilt $11|(10^m - 1)$.
2. Sei m ungerade. Dann gilt $11|(10^m + 1)$.
3. Es gilt $11|x \iff 11|s(x)$.

1. Sei also $m = 2\ell$ gerade. (Das bedeutet, dass m gerade ist und $\ell = m/2 \in \mathbb{N}$ die eindeutige Zahl ist, so dass $m = 2\ell$.) Dann ist

$$\begin{aligned} 11 \cdot \sum_{i=0}^{\ell-1} 9 \cdot 10^{2i} &= \sum_{i=0}^{\ell-1} 99 \cdot 10^{2i} = \sum_{i=0}^{\ell-1} (9 \cdot 10 + 9) \cdot 10^{2i} = \sum_{i=0}^{\ell-1} 9 \cdot 10^{2i+1} + 9 \cdot 10^{2i} \\ &= \sum_{j=0}^{2\ell-1} 9 \cdot 10^j = 10^m - 1. \end{aligned}$$

Also gilt $11|(10^m - 1)$.
2. Sei nun $m = 2\ell + 1$ ungerade. (Das bedeutet, dass m ungerade ist und $\ell = (m-1)/2 \in \mathbb{Z}_+$ die eindeutige Zahl ist, so dass $m = 2\ell + 1$.) Dann ist

$$\begin{aligned} 11 \cdot \Big(1 + \sum_{i=0}^{\ell-1} 9 \cdot 10^{2i+1}\Big) &= 11 + \sum_{i=0}^{\ell-1} 99 \cdot 10^{2i+1} = 11 + \sum_{i=0}^{\ell-1} (9 \cdot 10^{2i+2} + 9 \cdot 10^{2i+1}) \\ &= 11 + \sum_{i=1}^{2\ell} 9 \cdot 10^i = 10^{2\ell+1} + 1 = 10^m + 1. \end{aligned}$$

Deshalb gilt $11|(10^m + 1)$.
3. Sei nun $x = \sum_{k=0}^{m} a_k 10^k$. Dann schreiben wir, ähnlich wie im Beweis von Proposition 3.5,

$$11|x \iff 11\Big|\Big(x - \sum_{\substack{k=0 \\ k \text{ gerade}}}^{m} a_k(10^k - 1) - \sum_{\substack{k=0 \\ k \text{ ungerade}}}^{m} a_k(10^k + 1)\Big) = \sum_{\substack{k=0 \\ k \text{ gerade}}}^{m} a_k - \sum_{\substack{k=0 \\ k \text{ ungerade}}}^{m} a_k = \sum_{k=0}^{m} (-1)^k a_k$$
$$\iff 11|s(x).$$

□

Für die Teilbarkeit durch 7 gibt es zwar keine einfache Regel, jedoch hilft die nächste Aussage zumindest, die Teilbarkeit durch 7 schrittweise zu bestimmen.

Proposition 3.7 (Teilbarkeit durch 7). *Sei $x \in \mathbb{N}$ mit Dezimaldarstellung $x = \sum_{k=0}^{n} a_k 10^k$ und $z = \sum_{k=1}^{n} a_k 10^{k-1}$ die Zahl, die entsteht, wenn man die letzte Ziffer von x wegstreicht. Dann gilt*

$$7|x \iff 7|(z - 2a_0).$$

Beispiel 3.8. Sei $x = 1232$, also $x = a_3 \cdot 10^3 + a_2 \cdot 10^2 + a_1 \cdot 10^1 + a_0 \cdot 10^0$ mit $a_3 = 1, a_2 = 2, a_1 = 3, a_0 = 2$. Dann ist

$$z - 2a_0 = \sum_{k=1}^{3} a_k 10^{k-1} - 2a_0 = 123 - 4 = 119.$$

Da $7|119$, gilt nach der Proposition auch $7|1232$. Außerdem kann man $7|119$ ebenfalls durch die Proposition einsehen. Es gilt nämlich, dass $11 - 2 \cdot 9 = -7$, und da $7| - 7$, gilt $7|119$.

Beweis von Proposition 3.7. Wir schreiben

$$\sum_{k=0}^{n} a_k 10^k = 10\Big(\Big(\sum_{k=1}^{n} a_k 10^{k-1}\Big) - 2a_0\Big) - 21a_0.$$

Da $7|21a_0$ und $7 \nmid 10$, gilt

$$7|x \iff 7\Big|\Big(\Big(\sum_{k=1}^{n} a_k 10^{k-1}\Big) - 2a_0\Big).$$

□

4 Existenz, Eindeutigkeit und Anzahl von Lösungen

Viele Probleme in der Mathematik sind so gestellt, dass man sich mit der Anzahl an Lösungen des Problems befassen muss. Besonders interessant sind Probleme, die eine eindeutige Lösung besitzen. Hier muss man sich mit Existenz und Eindeutigkeit der Lösung auseinandersetzen. Prinzipiell eine andere Frage ist es, die Lösung(en) anzugeben. Hier ein einfaches Beispiel.

Beispiel 4.1 (Lösungen einer quadratischen Gleichung). Seien $a, b, c \in \mathbb{R}$.

$$\text{Für welche } x \in \mathbb{R} \text{ gilt } ax^2 + bx + c = 0?$$

Aus der Schule ist bekannt, dass es diese Gleichung genau dann eine Lösung hat, wenn $b^2 - 4ac \geq 0$. Die Lösung ist genau dann eindeutig, wenn $b^2 = 4ac$. Gilt $b^2 > 4ac$, so gibt es zwei Lösungen, nämlich

$$x_1 = \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}, \qquad x_2 = \frac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}.$$

Bemerkung 4.2 (Differenzialgleichungen). Bekanntlich ist $e^0 = 1$ und die Exponentialfunktion identisch mit ihrer eigenen Ableitung. Wir können nun fragen:

Wieviele differenzierbare Funktionen f gibt es mit $f' = f$ und $f(0) = 1$?

Die Existenz einer Lösung dieses Problems ist durch $f(x) = e^x$ gesichert. Wir können jedoch momentan nicht entscheiden, ob es nicht noch andere Funktionen f gibt mit $f(0) = 1$, die gleich ihrer eigenen Ableitung sind, d.h. wir können die Eindeutigkeit der Lösung nicht entscheiden. Dies wird in der Vorlesung *Analysis 2* behandelt werden.

4.1 Lineare Gleichungssysteme

Definition 4.3. *Sei*[5] $A = (a_{ij})_{i,j=1,...,n} \in \mathbb{R}^{n\times n}$ *und* $b = (b_1, ..., b_n) \in \mathbb{R}^n$*. Die Lösung des durch* A *und* b *definierten linearen Gleichungssystems ist ein* $x = (x_1, ..., x_n) \in \mathbb{R}^n$*, so dass*[6]

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j = b_j, \qquad i = 1, ..., n.$$

Wir schreiben dies auch als

$$\begin{aligned} a_{11}x_1 + \cdots + a_{1n}x_n &= b_1 \\ &\cdots \\ a_{n1}x_1 + \cdots + a_{nn}x_n &= b_n \end{aligned}$$

oder als

$$Ax = b.$$

Bemerkung 4.4 (Gauß'sches Eliminationsverfahren). Aus der Schule ist bekannt, wie man Lineare Gleichungssysteme mittels des Gauß'schen Eliminationsverfahrens löst. Wir wiederholen dies am Beispiel des Gleichungssystems

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 + x_3 &= 1 \\ x_1 - 2x_2 + x_3 &= -5 \\ 2x_1 + 4x_2 + 3x_3 &= 4. \end{aligned}$$

[5] Wir schreiben $\mathbb{R}^{n\times n}$ als die Menge der Matrizen mit n Zeilen, n Spalten, deren Einträge reelle Zahlen sind.

[6] Das in der Gleichung nachgestellte $i = 1, ..., n$ ist gleichbedeutend mit einem vorgestellten $\forall i = 1, ..., n$. Es bedeutet also, dass alle Gleichungen erfüllt sein müssen.

Wir verwenden die Schreibweise mit der erweiterten Koeffizientenmatrix. Diese müssen wir durch geschickte Multiplikation mit reellen Zahlen und Addition von Zeilen auf eine Dreiecksform bringen. Dies erfolgt etwa so:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 1 & -5 \\ 2 & 4 & 3 & 4 \end{pmatrix} \qquad \begin{matrix} \\ \text{I - II} \\ \text{III - 2I} \end{matrix}$$
$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 3 & 0 & 6 \\ 0 & 2 & 1 & 2 \end{pmatrix} \qquad \begin{matrix} \\ \\ \text{3III - 2II} \end{matrix}$$
$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 3 & 0 & 6 \\ 0 & 0 & 3 & -6 \end{pmatrix}$$

Nun lesen wir die Lösung ab. Aus Zeile 3 erkennen wir $x_3 = -2$, aus Zeile 2 folgt $x_2 = 2$. Aus der ersten Gleichung ergibt sich $x_1 = 1 - x_2 - x_3 = 1 - 2 + 2 = 1$.

Aus der Schule ist außerdem folgendes über die Lösungsmenge eines linearen Gleichungssystems, das genausoviele Unbekannte wie Gleichungen hat, bekannt:

1. Ergibt sich im Gauß'schen Eliminationsverfahren eine Zeile $(0 \ \cdots \ 0 \ a)$ für ein $a \neq 0$, so hat das System keine Lösung. (So eine Zeile wird auch *Widerspruchszeile* genannt.)
2. Ergibt sich im Gauß'schen Eliminationsverfahren eine Zeile $(0 \ \cdots \ 0 \ 0)$, so hat das System unendlich viele Lösungen.
3. In allen anderen Fällen gibt es genau eine Lösung.

Prinzipiell kann man die Aufgabe, ein Problem auf Lösbarkeit zu untersuchen, vom Finden der Lösung trennen. Im Gauß'schen Eliminationsverfahren findet zwar beides gleichzeitig statt, jedoch wollen wir noch für 2×2-Systeme eine einfache Methode angeben, wie man die Lösbarkeit direkt sehen kann. Diesen Vorgehen wird in der Vorlesung *Lineare Algebra* noch deutlich erweitert.

Theorem 4.5. *Sei* $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{2\times 2}$ *und* $z \in \mathbb{R}^2$. *Dann hat* $Ax = z$ *genau dann eine eindeutige Lösung, wenn* $ad - bc \neq 0$.

Beweis. Wieder verwenden wir die Schreibweise mit der erweiterten Koeffizientenmatrix und versuchen, dieses allgemeine System zu lösen. Wir erhalten

$$\begin{pmatrix} a & b & z_1 \\ c & d & z_2 \end{pmatrix} \qquad \begin{matrix} \\ a\text{II - }c\text{I} \end{matrix}$$
$$\begin{pmatrix} a & b & z_1 \\ 0 & ad - bc & az_2 - cz_1 \end{pmatrix}.$$

Nach der obigen Bemerkung gibt es genau dann eine eindeutige Lösung des Systems, wenn $ad - bc \neq 0$. Dies war aber die Behauptung. □

4.2 Primfaktorzerlegung

Für ein $x \in \mathbb{N} \setminus \{1\}$ fragen wir:

> Für welche m und $p_1, ..., p_m$ prim ist $x = p_1 \cdots p_m$?

Wir sprechen von einer Zerlegung der Zahl n in Primfaktoren.

Definition 4.6. *Sei $x \in \mathbb{N}$. Dann heißen Primzahlen $p_1, ..., p_m$* Primfaktorzerlegung *von x, falls $x = p_1 \cdot p_2 \cdots p_m$. Hier heißen $p_1, ..., p_m$ auch* Primfaktoren.

Existenz und Eindeutigkeit der Primfaktorzerlegung wurde in der Schule eher hingenommen, jedoch nie gezeigt. Dies holen wir kurz nach.

Theorem 4.7 (Eindeutigkeit der Primfaktorzerlegung). *Sei $x \in \mathbb{N} \setminus \{1\}$. Dann gibt es eine Primfaktorzerlegung von x, die bis auf Reihenfolge eindeutig ist.*

Beweis. EXISTENZ: Ist x prim, so gibt es die triviale Primfaktorzerlegung $x = x$. Angenommen, es gibt ein x nicht prim, für das es keine Primfaktorzerlegung gibt. OBdA[7] ist x minimal. Dann gibt es $z, y \in \mathbb{N} \setminus \{1\}$ mit $x = yz$, und wir erhalten eine Primfaktorzerlegung von x, indem wir Primfaktorzerlegungen von y und z multiplizieren. Dies ist ein Widerspruch zur Annahme, dass x keine Primfaktorzerlegung hat.
EINDEUTIGKEIT (BIS AUF REIHENFOLGE DER FAKTOREN): Angenommen, die Primfaktorzerlegung wäre für ein $x \in \mathbb{N} \setminus \{1\}$ nicht eindeutig. Dann kann x keine Primzahl sein und ist oBdA die kleinste Zahl, deren Primfaktorzerlegung nicht eindeutig ist, d.h. es gibt $p_1, ..., p_m, q_1, ..., q_n$ prim mit

$$x = p_1 \cdots p_m = q_1 \cdots q_n.$$

Dann muss $\{p_1, ..., p_m\} \cap \{q_1, ..., q_m\} = \emptyset$ sein. Andernfalls könnte man die Gleichung durch das gemeinsame Element teilen und würde eine noch kleinere natürliche Zahl erhalten, deren Primfaktorzerlegung nicht eindeutig ist.

Sei weiter oBdA $p_1 = \min(\{p_1, ..., p_m\})$ (d.h. p_1 ist das kleinste Element von $\{p_1, ..., p_m\}$) und $q_1 = \min(\{q_1, ..., q_n\})$. Dann ist $p_1^2 \leq x$ und $q_1^2 \leq x$ und damit $p_1 q_1 = \sqrt{p_1^2 q_1^2} \leq \sqrt{x^2} = x$. Wir betrachten nun die Zahl $y := x - p_1 q_1 \geq 0$. Es muss $p_1 | y$ und $q_1 | y$, also $p_1 q_1 | y$. Es gilt auch $p_1 q_1 | (y + p_1 q_1)$, also $p_1 q_1 | x$ und damit $q_1 | \frac{x}{p_1}$. Da $\frac{x}{p_1} < x$, muss $\frac{x}{p_1}$ eine eindeutige Primfaktorzerlegung haben. Diese ist nun $p_2 \cdots p_m$. Da aber $q_1 | \frac{x}{p_1}$, gibt es $r_1, ..., r_o$ prim mit $\frac{x}{p_1} = q_1 r_1 \cdots r_o$. Damit ist die Primfaktorzerlegung von $\frac{x}{p_1}$ nicht eindeutig, was ein Widerspruch zur Minimalität von x ist. Daraus folgt die Behauptung. □

4.3 Sudoku

Wir beschäftigen uns nun mit dem 4×4-Sudoku. Bekanntlich ist Sudoku ein Spiel mit dem Ziel, ein Quadrat von (in unserem Fall) 4×4 Feldern mit Zahlen $1, 2, 3, 4$ so auszufüllen, dass in jeder Reihe, Spalte und jedem dick umrandeten 4er-Block jede Zahl nur einmal vorkommt. Wir fragen also:

> Für welche Einträge mit den Zahlen 1,2,3,4 kommt in jeder Spalte, jeder Zeile und jedem der vier Vierer-Blöcke jede Zahl genau einmal vor?

[7] ohne Beschränkung der Allgemeinheit

Wir starten mit einem Beispiel eines korrekt ausgefüllten Sudokus.

4	3	2	1
2	1	4	3
1	2	3	4
3	4	1	2

Typischweise werden ein paar Zahlen vorgegeben, und die restlichen Zahlen sind einzutragen. Auch hier stellt sich die Frage nach Existenz und Eindeutigkeit der Lösung. Wir beginnen mit einem Sudoku, bei dem nur drei Zahlen vorgegeben sind. Hier existiert keine Lösung.

	1		
		1	
3			

Natürlich gibt es die Möglichkeit, drei Zahlen so vorzugeben, dass eine Lösung existiert, etwa hier.

	1		
		2	
3			

Es stellt sich allerdings heraus, dass es keine eindeutige Lösung gibt, sondern drei verschiedene, nämlich:

2	*3*	*1*	*4*
4	1	*3*	*2*
1	*4*	2	*3*
3	*2*	*4*	*1*

2	*3*	*4*	*1*
4	1	*3*	*2*
1	*4*	2	*3*
3	*2*	*1*	*4*

4	*3*	*1*	*2*
2	1	*3*	*4*
1	*4*	2	*3*
3	*2*	*4*	*1*

Eindeutig wird die Lösung dann, wenn man eine vierte Zahl vorgibt, etwa so.

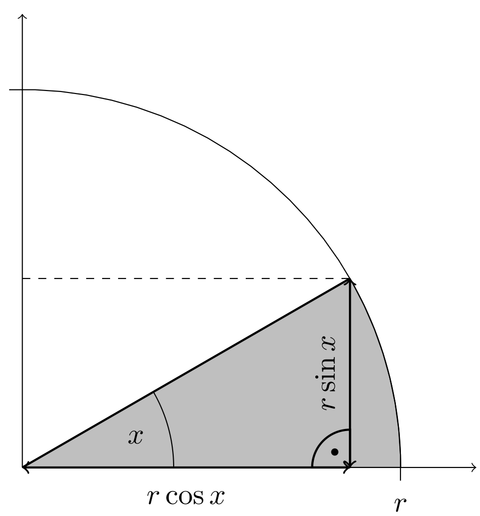
			4
	1		
		2	
3			

Mit der Anzahl an Lösungen, wenn man keine einzige Zahl vorgibt, beschäftigen wir uns in der Übung.

5 Einschub: Trigonometrische Funktionen

Aus der Schule sind Winkel bekannt. Diese können wir entweder in *Grad* angeben (etwa 90° für einen rechten Winkel), oder in *Bogenmaß*. Das bedeutet, dass wir den Winkel x mit der Länge des Bogenstückes auf dem Einheitskreis (also dem Kreis mit Radius 1), das von diesem Winkel aufgespannt wird, gleichsetzen. Wir werden im Folgenden mit Winkeln immer im Bogenmaß rechnen.

Wir beschäftigen uns nun mit trigonometrischen Funktionen, insbesondere Cosinus und Sinus eines Winkels. Grundlegend ist hierfür ein rechtwinkliges Dreieck. Cosinus und Sinus ergeben sich dabei als Quotienten der Längen der beiden Katheten (Gegenkathete und Ankathete) und der Hypotenuse (also der längsten Seite)[8]:



Der Satz des Pythagoras, angewandt auf dieses Bild, besagt $\cos^2 x + \sin^2 x = 1$. Hier kommen weitere Rechenregeln.

Proposition 5.1 (Additionstheoreme von Cosinus und Sinus). *Seien $x, y \in \mathbb{R}$. Dann gilt*

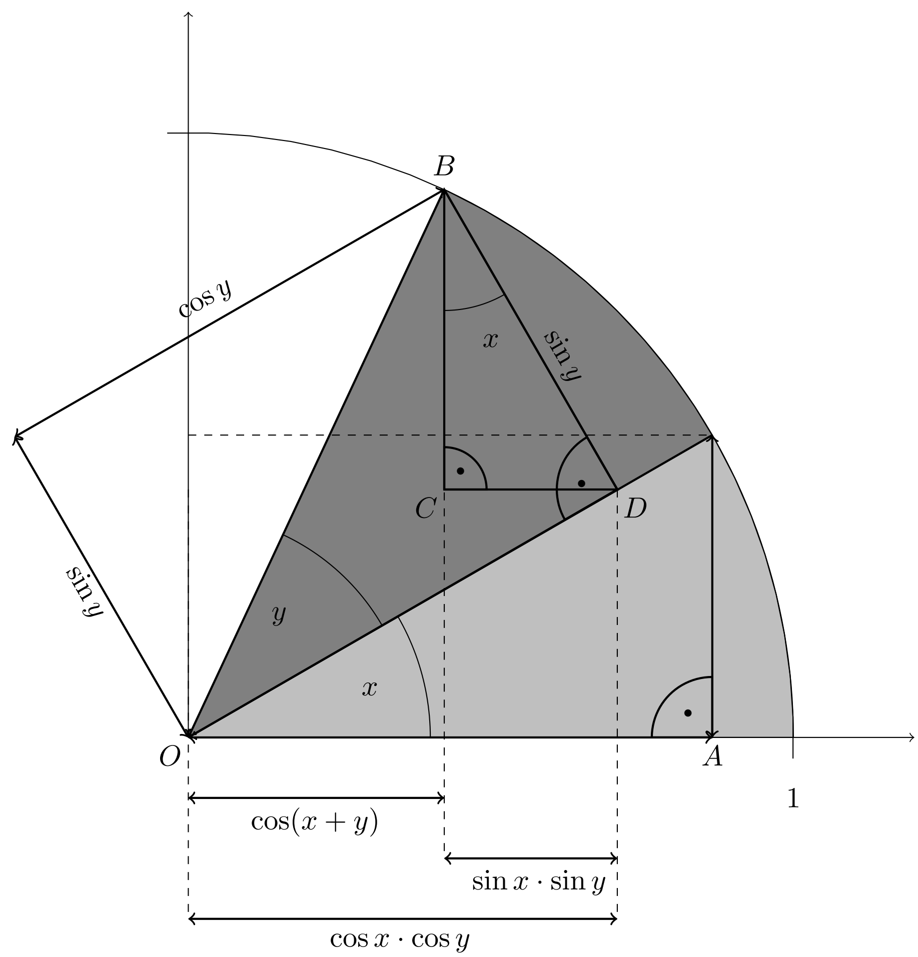
$$\cos(x + y) = \cos x \cdot \cos y - \sin x \cdot \sin y,$$
$$\sin(x + y) = \sin x \cdot \cos y + \cos x \cdot \sin y.$$

[8]In der Vorlesung Analysis 1 wird es noch alternative Definitionen für die Cosinus- und Sinus-Funktionen geben.

Bemerkung 5.2. Aus obigen Aussagen lassen sich für Spezialfälle weitere Aussagen herleiten. Es ist etwa

$$\cos(2x) = \cos^2 x - \sin^2 x = \cos^2 x + \sin^2 x - 2\sin^2 x = 1 - 2\sin^2 x.$$

Beweis von Proposition 5.1. Wir veranschaulichen nur die erste Aussage anhand einer Grafik, die zweite wird Teil der Übung sein. Hier ist $\cos(x+y)$ wie oben definiert; siehe das rechtwinklige Dreieck, das OB als Hypotenuse hat. Die Länge $\cos x \cdot \cos y$ sehen wir, indem wir die Ankathete des rechtwinkligen Dreiecks mit Hypotenuse OD, die Länge $\cos y$ hat, betrachtet. Die Länge der Strecke $\sin x \cdot \sin y$ entsteht im rechtwinklingen Dreieck BCD, da die Hypotenuse die Länge $\sin y$ hat.



∎

6 Grenzwerte

Der Begriff des Grenzwerts (oder Limes) kommt in der Schule manchmal vor, wird jedoch eigentlich nie formal eingeführt. Dies wollen wir hier zwar auch nicht machen (da das einen großen Teil der Vorlesung *Analysis 1* ausmacht), sondern uns einige Beispiele aus der Schule ansehen.

6.1 Einführung

Wir beginnen mit ein paar Beispielen:

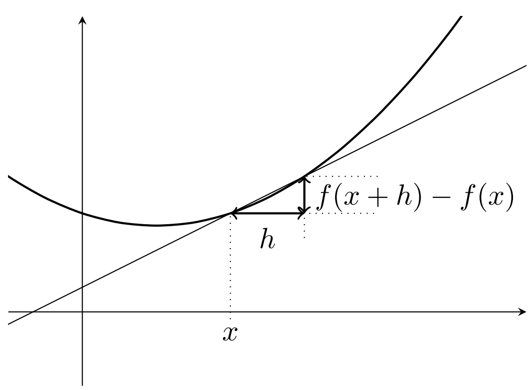
1. Analysiert man Funktionen in der Schule, betrachtet man etwa Pol-Stellen oder das Verhalten im unendlichen. Beispielsweise sagt man dann, die Funktion $f(x) = \frac{1}{x}$ hat eine waagrechte Asymptote by $y = 0$ und schreibt
$$\lim_{x\to\infty} \frac{1}{x} = 0.$$
Begründet wird dieser Grenzwert zumeist mit einer Wertetabelle.

x	1	10	100	1000
$\frac{1}{x}$	1	0.1	0.01	0.001

Diese Begründung ist allerdings nicht rigoros, da in einer solchen Tabelle ja nur Beispiele aufgeführt sind. Etwa könnte man ja auch fälschlicherweise behaupten, dass $\lim_{x\to\infty} \sin(x\pi) = 0$, da

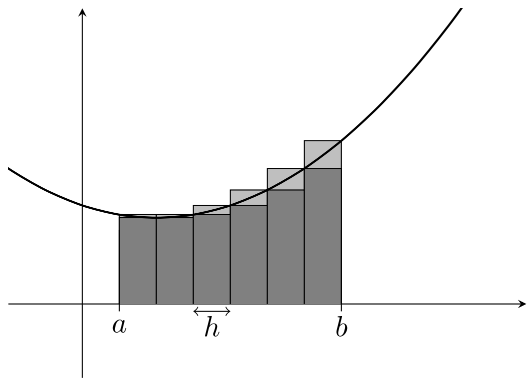
x	1	10	100	1000
$\sin(\pi x)$	0	0	0	0

2. Die Ableitung einer Funktion f in x wurde definiert als
$$f'(x) = \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}. \tag{6.1}$$
Dabei wurde der Bruch $\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$ als Steigung der Gerade durch die Punkte $(x, f(x))$ und $(x+h, f(x+h))$ interpretiert.



Die Ableitung $f'(x)$ ist dann die Steigung der Tangente an den Funktionsgraphen im Punkt $(x, f(x))$.

3. Bei der Einführung des Integrals einer Funktion f über ein Intervall $[a, b]$ wurde von Ober- und Untersumme gesprochen. In beiden Fällen wird $[a, b]$ in kleine vertikale Abschnitte der Breite h unterteilt, und $\int_a^b f(x)dx$ (also die Fläche unter der Funktion f) durch die Summe der Streifenflächen approximiert. Das Integral ergibt sich dann im Fall immer kleiner werdender Abschnitte.



Betrachten wir etwa eine Funktion f, definiert auf dem Intervall $[0,1]$, so ergibt sich

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} f(\tfrac{k}{n}) \cdot \tfrac{1}{n} = \int_0^1 f(x)dx \tag{6.2}$$

Wir wollen zumindest versuchen, den Grenzwertbegriff etwas zu formalisieren. Wir verwenden Theorem 6.2, das wir mit den uns zur Verfügung stehenden Mitteln allerdings nicht beweisen können. (Dies würde eine formale Einführung der reellen Zahlen erfordern.)

Definition 6.1 (Monotone, beschränkte Folge). *Eine reellwertige Folge $(a_n)_{n=1,2,...}$ heißt monoton wachsend, falls $(i < j) \Rightarrow (a_i \leq a_j)$ für alle $i, j = 1, 2, ...$ gilt, und streng monoton wachsend falls $(i < j) \Rightarrow (a_i < a_j)$ für alle $i, j = 1, 2, ...$ Sie heißt (streng) monoton fallend, falls $(-a_n)_{n=1,2,...}$ (streng) monoton wachsend ist. Ist $(a_n)_{n=1,2,...}$ monoton wachsend oder monoton fallend, so nennen wir sie monoton. Sie heißt beschränkt, wenn es ein $C > 0$ gibt mit $|a_n| < C$ für alle $n = 1, 2, ...$*

Theorem 6.2. *Sei $(a_n)_{n=1,2,...}$ eine reelwertige Folge. Gilt*

$(a_n)_{n=1,2,...}$ *monoton wachsend (fallend) und beschränkt,*

so gibt es eine kleinste (größte) reelle Zahl a mit $a_n \leq a$ $(a_n \geq a)$ für alle $n = 1, 2, ...$ Diese nennen wir Grenzwert der Folge und schreiben

$$\lim_{n\to\infty} a_n := a.$$

Bemerkung 6.3.
1. Wie im Abschnitt 4 gilt es beim Grenzwert, zunächst die Existenz zu untersuchen. Beispielsweise existiert der Grenzwert der Folge $(a_n)_{n=1,2,...}$ mit $a_n = n$ nicht, da diese Folge nicht beschränkt ist. Weiter können wir bisher nichts über die Existenz des Grenzwerts (oder Konvergenz) von $(a_n)_{n=1,2,...}$ mit $a_n = (-1)^{n-1}/n$, also $a_1 = 1, a_2 = -\frac{1}{2}, a_3 = \frac{1}{3}, a_4 = -\frac{1}{4}, ...$ aussagen, da diese Folge nicht monoton ist. Wir bemerken allerdings, dass Grenzwerte per Definition eindeutig sind. Theorem 6.2 sagt ja aus, dass es genau eine reelle Zahl mit den geforderten Eigenschaften (minimal, obere Schranke der monoton wachsenden Folge) gibt.

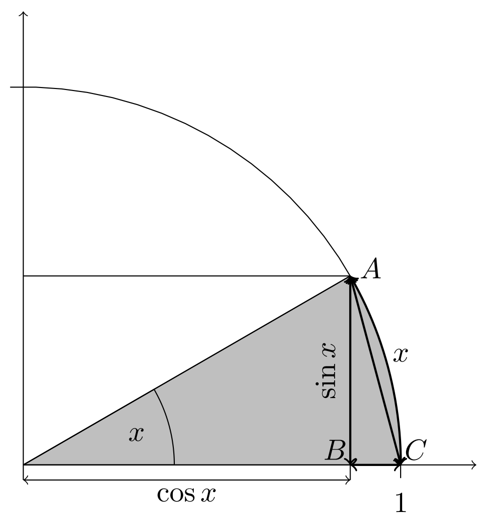
2. Nun haben wir also den Grenzwert einer (beschränkten, monotonen) Folge reeller Zahlen definiert. Etwa bei der Definition der Ableitung in (6.1) steht allerdings keine Folge unter

dem lim, sondern h als kontinuierliche Variable. Diesen Grenzwert definieren wir so: Sei $(h_n)_{n=1,2,\ldots}$ eine monotone Folge mit $\lim_{n\to\infty} h_n = 0$. Falls $\lim_{n\to\infty} \frac{f(x+h_n)-f(x)}{h_n}$ für jede Wahl von $(h_n)_{n=1,2,\ldots}$ existiert, und unabhängig von $(h_n)_{n=1,2,\ldots}$ ist, so bezeichnen wir den (von der Folge nun unabhängigen) Grenzwert als $\lim_{h\to 0} \frac{f(x+h)-f(x)}{h}$.

3. Falls obige Grenzwerte existieren und den Wert a haben, so schreiben wir abkürzend auch
$$a_n \xrightarrow{n\to\infty} a, \qquad f(x) \xrightarrow{x\to 0} a, \qquad f(x) \xrightarrow{x\to\infty} a.$$

Beispiel 6.4. Wir zeigen nun
$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} = 1, \qquad \lim_{x\to 0} \frac{1-\cos x}{x} = 0.$$

Zunächst zur zweiten Aussage, die wir uns anhand folgender Skizze veranschaulichen:



Betrachten wir nun das Dreieck ABC. Klar ist, dass die Seite AC kürzer ist als das Stück Bogen der Länge x. Daraus folgt mit Hilfe des Satzes von Pythagoras
$$x^2 \geq \sin^2 x + (1-\cos x)^2 = \sin^2 x + 1 - 2\cos x + \cos^2 x = 2(1-\cos x)$$

Daraus leiten wir
$$\frac{1-\cos x}{x} \leq \frac{x}{2}$$
ab und es folgt die zweite Behauptung.

Für die erste Aussage macht man sich anhand obiger Skizze klar, dass die Strecke AB kürzer als die Bogenlänge x ist, also $\sin x \leq x$. Andererseits ist die Bogenlänge x kleiner als die Summe der Strecken AB und BC. Mit anderen Worten ist $\sin x \geq x - (1-\cos x)$. Teilt man durch x, erhält man aus diesen beiden Ungleichungen
$$1 - \frac{1-\cos x}{x} \leq \frac{\sin x}{x} \leq 1.$$

Im Grenzwert kleiner x müssen nun die Ungleichungen erhalten bleiben, also folgt mit der zweiten Aussage die erste.

Beispiel 6.5 (Ableitung von sin und cos). Wir berechnen nun

$$\sin' = \cos, \qquad \cos' = -\sin.$$

Genau genommen berechnen wir nur die erste Gleichheit, und beschäftigen uns mit der zweiten Gleichheit in den Übungen.
Wir schreiben, mit Hilfe von Theorem 5.1 und dem letzten Beispiel

$$\frac{\sin(x+h)-\sin x}{h} = \sin x \cdot \frac{\cos h - 1}{h} + \cos x \frac{\sin h}{h} \xrightarrow{h\to 0} \cos x.$$

Für das dritte Beispiel benötigen wir eine Hilfsaussage:

Lemma 6.6. *Seien $x, y > 0$ und $n \in \mathbb{N}$. Dann gilt*[9]

$$(x+y)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^k y^{n-k}.$$

Beweis. Bekannt ist die Formel für die Binomialverteilung. Wenn X eine binomialverteilte Zufallsvariable mit Parametern n und p ist, so gilt

$$1 = \sum_{k=0}^{n} \mathbb{P}(X=k) = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}.$$

Wir betrachten nun $p = \frac{x}{x+y}$ und erhalten

$$1 = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \left(\frac{x}{x+y}\right)^k \left(\frac{y}{x+y}\right)^{n-k} = \sum_{k=0}^{n} \frac{\binom{n}{k} x^k y^{n-k}}{(x+y)^n}.$$

Daraus folgt die Behauptung. □

Beispiel 6.7. Wir begründen nun die bekannte Rechenregel für $f(x) = x^n$

$$f'(x) = nx^{n-1}.$$

Wir berechnen

$$\frac{(x+h)^n - x^n}{h} = \frac{\sum_{k=0}^{n-1} \binom{n}{k} x^k h^{n-k}}{h} = \sum_{k=0}^{n-1} \binom{n}{k} x^k h^{n-k-1} = \binom{n}{n-1} x^{n-1} + h \sum_{k=0}^{n-2} \binom{n}{k} x^k h^{n-k-2}$$
$$\xrightarrow{h\to 0} nx^{n-1}.$$

[9] Zur Erinnerung. Der Binomialkoeffizient $\binom{n}{k}$ ist für $k = 0, ..., n$ definiert durch

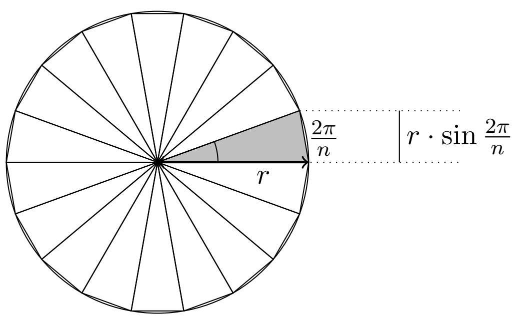
$$\binom{n}{k} := \frac{n!}{k!(n-k)!} = \frac{n\cdots(n-k+1)}{k\cdots 1}.$$

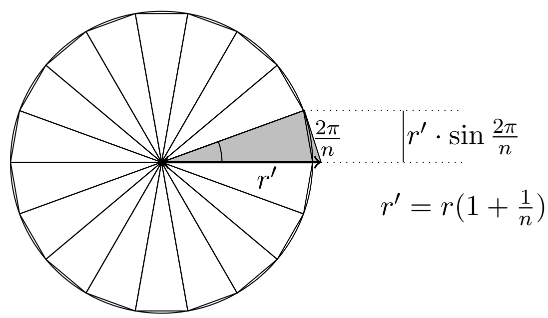
6.2 Kreisfläche

In Kapitel 5 haben wir Winkel in Bogenmaß angegeben. Dabei war der Winkel x gegeben durch die Länge des Bogens auf dem Einheitskreis, der von x umschlossen wird. Ein rechter Winkel ist also beispielsweise die Länge des Viertelkreises, und der gesamte Kreisumfang entspricht 360° in Bogenlänge. Man hat sich darauf geeinigt, diesen Umfang des Kreises als 2π abzukürzen. Entsprechend ist der Umfang eines Kreises mit Radius r gegeben durch $2r\pi$. Man kann berechnen, dass die Kreiszahl π in etwa eine Größe von 3.141593 hat. Wir wollen in diesem Abschnitt berechnen, wie groß die Fläche eines Kreises (mit Radius r) ist. Bekanntlich gilt folgendes:

Theorem 6.8 (Fläche eines Kreises). *Die Fläche eines Kreises in der Ebene mit Radius r beträgt $A = \pi r^2$.*

Beweisvariante 1:. Gegeben sein ein Kreis mit Radius r und Mittelpunkt (0,0). Diesen teilen wir nun in n Kreissegmente mit identischem Winkel $\frac{2\pi}{n}$.





Wir betrachten nun (linke Abbildung) das gleichschenklige Dreieck, das durch die Punkte $(0,0), (r,0)$ und $(r\cos\frac{2\pi}{n}, r\sin\frac{2\pi}{n})$ festgelegt wird. Die Fläche dieses Dreiecks ist $\frac{1}{2} \cdot r \cdot r \sin\frac{2\pi}{n}$. Da der Kreis etwas größer ist als n dieser Dreiecke, folgt mit Beispiel 6.4.

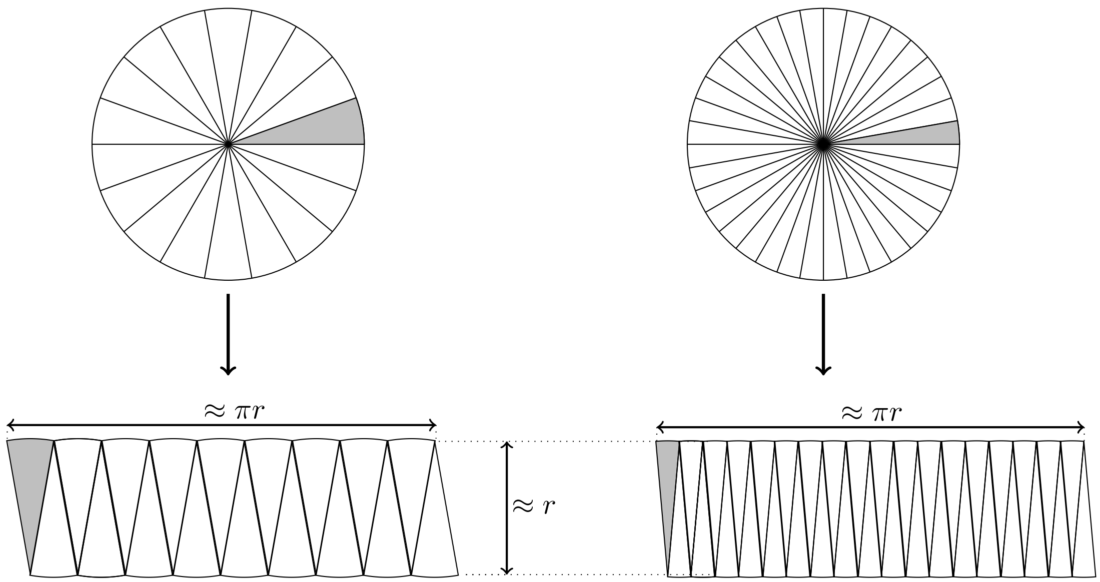
$$A \geq \tfrac{n}{2} r^2 \sin\tfrac{2\pi}{n} = \pi \frac{n}{2\pi} r^2 \sin\tfrac{2\pi}{n} \xrightarrow{n\to\infty} \pi r^2.$$

Sei $r' = r(1 + \frac{1}{n})$. Analog (rechte Abbildung) berechnet die Fläche des Dreiecks durch die Punkte $(0,0), (r',0)$ und $(r',0), r'\sin\frac{2\pi}{n}$ aufgespannt wird. Die Vereinigung aller dieser Dreiecke umschließen (für große n) den Kreis, so dass

$$A \leq \tfrac{n}{2} r^2 (1 + \tfrac{1}{n})^2 \sin\tfrac{2\pi}{n} = \pi \frac{n}{2\pi} r^2 (1 + \tfrac{1}{n})^2 \sin\tfrac{2\pi}{n} \xrightarrow{n\to\infty} \pi r^2.$$

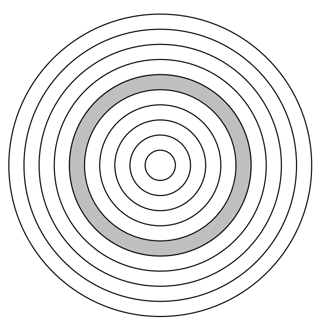
Insgesamt haben wir also die Behauptung gezeigt. □

Beweisvariante 2. Diese Variante ist zwar sehr anschaulich, jedoch weniger rigoros als die letzte. Wieder zerlegen wir den Kreis. Diesmal jedoch fügen wir ihn anders wieder zusammen. Beim Zerschneiden des Kreises in n Kreissegmente fügen wir diese nun wie folgt wieder zusammen (links für etwas kleineres n, rechts für größeres n):



Wie man sieht, nähert man sich für große n immer weiter einem Rechteck mit den Seitenlängen πr und r. Entsprechend entsteht die Aussage dann im Grenzwert großer n. $\square$

Beweisvariante 3. Und wieder zerlegen wir den Kreis, diesmal jedoch in n Kreisringe der Dicke $\frac{r}{n}$:



Der (von innen gezählte) k-te Kreisring hat einen Umfang von $2r\frac{k}{n}\pi$. Entsprechend ist die Fläche des k-ten Kreisringes kleiner als $2r\frac{k}{n}\pi \cdot \frac{r}{n}$, aber größer als $2r\frac{k-1}{n}\pi \cdot \frac{r}{n}$. Summation über k ergibt (siehe (6.2) für die Konvergenz)

$$A \leq \sum_{k=1}^{n} 2r\frac{k}{n}\pi \cdot \frac{r}{n} = 2r^2\pi \sum_{k=1}^{n} \frac{k}{n}\frac{1}{n} \xrightarrow{n\to\infty} 2r^2\pi \int_0^1 x dx = r^2\pi,$$

$$A \geq \sum_{k=1}^{n} 2r\frac{k-1}{n}\pi \cdot \frac{r}{n} = 2r^2\pi \sum_{k=1}^{n-1} \frac{k}{n}\frac{1}{n} \xrightarrow{n\to\infty} 2r^2\pi \int_0^1 x dx = r^2\pi.$$

Daraus folgt die Behauptung. $\square$

Beweisvariante 4. Vielleicht haben Sie in der Schule die Formel für die Integration durch Substitution kennengelernt[10]: Die Fläche des oberen Halbkreises (also des Teils des Kreises überhalb der x-Achse) entspricht der Fläche unter der Funktion $f(x) = r\sqrt{1-(x/r)^2}$ im Intervall $x \in [-r, r]$. (Es ist so nämlich gerade $x^2 + f(x)^2 = r^2$.) Also können wir schreiben

$$A = 2\int_{-r}^{r} r\sqrt{1-(x/r)^2}dx \overset{x=r\cos y}{=} 2r^2 \int_0^{\pi} \sin^2 y dy = r^2 \int_0^{\pi} \sin^2 y + \cos^2 y dy = r^2\pi.$$

Dabei haben wir im vorletzten '=' verwendet, dass $\int_0^\pi \sin^2 y dy = \int_0^\pi \cos^2 y dy$ (was anhand der Graphen der beiden Integranden einleuchtet). □

6.3 Die Euler'sche Zahl

In der Schule gibt es im Wesentlichen zwei Möglichkeiten, die Euler'sche Zahl $e \approx 2.718282$ einzuführen:

1. Die Euler'sche Zahl e ist die Basis, für die die Funktion $\exp : x \mapsto e^x$ gerade sich selbst als Ableitung hat.
2. Die Euler'sche Zahl e ist der Grenzwert der Folge $(x_n)_{n=1,2,\dots}$ mit
$$x_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n.$$

Wir werden hier 2. folgen, und versuchen einzusehen, wie man hieraus 1. folgern kann. (Letzteres geschieht dann im nächsten Kapitel in Bemerkung 7.7.) Wir zeigen also zunächst die Existenz des Grenzwertes der Folge.

Theorem 6.9. *Die Folge $(x_n)_{n=1,2,\dots}$ mit $x_n = \left(1+\frac{1}{n}\right)^n$ ist streng monoton wachsend und von oben durch 3 beschränkt.*

Definition 6.10. *Wir definieren (den nach Theorem 6.2 existierenden Grenzwert)*

$$e := \lim_{n\to\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n.$$

Bevor wir zum Beweis von Theorem 6.9 kommen können, benötigen wir eine Hilfsaussage.

Lemma 6.11. *Es gilt*
$$\sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k(k-1)} = 1 - \frac{1}{n}.$$

Beweis. Wir schreiben

$$\sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k(k-1)} = \sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k-1} - \frac{1}{k} = \left(\sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{k}\right) - \left(\sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k}\right) = 1 - \frac{1}{n}.$$

□

[10] Etwa so: Sei φ streng monoton und ist F eine Stammfunktion von f. Dann ist $F \circ \varphi$ eine Stammfunktion von $(f\circ\varphi)\cdot\varphi'$ und es gilt
$$\int_{\varphi(a)}^{\varphi(b)} f(x)dx \overset{x=\varphi(y)}{=} \int_a^b f(\varphi(y))\cdot\varphi'(y)dy.$$

Beweis von Theorem 6.9. Wir berechnen

$$\begin{aligned}\frac{x_{n+1}}{x_n} &= \Big(1+\frac{1}{n+1}\Big)\cdot\Big(\frac{1+\frac{1}{n+1}}{1+\frac{1}{n}}\Big)^n\\
&= \Big(1+\frac{1}{n+1}\Big)\cdot\Big(\frac{(n+2)n}{(n+1)^2}\Big)^n = \Big(1+\frac{1}{n+1}\Big)\cdot\Big(\frac{(n+2)n}{(n+1)^2}\Big)^n\\
&= \Big(1+\frac{1}{n+1}\Big)\Big(1-\frac{1}{(n+1)^2}\Big)^n\\
&> \Big(1+\frac{1}{n+1}\Big)\Big(1-\frac{n}{(n+1)^2}\Big)\\
&> 1+\frac{1}{n+1}-\frac{n}{(n+1)^2} = 1+\frac{1}{(n+1)^2} > 1.\end{aligned}$$

Daraus folgt die strenge Monotonie. Für die Beschränktheit schreiben wir mit Lemma 6.6

$$\begin{aligned}\Big(1+\frac{1}{n}\Big)^n &= \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\frac{1}{n^k} = \sum_{k=0}^{n}\frac{1}{k!}\frac{n\cdots(n-k+1)}{n^k}\\
&< \sum_{k=0}^{n}\frac{1}{k!} = 2+\sum_{k=2}^{n}\frac{1}{k!} < 2+\sum_{k=2}^{n}\frac{1}{k(k-1)} = 3-\frac{1}{n}\\
&< 3\end{aligned}$$

wegen Lemma 6.11. □

7 Reelle Zahlen und Exponentialfunktionen

Ziel dieses Kapitels ist es, einige Facetten der aus der Schule bekannten Exponentialfunktion $x \mapsto a^x$ für $a > 0$ zu beleuchten. Es wird (hoffentlich) klar werden, dass die Konzepte der Schulmathematik nicht ausreichen, um diese Funktion überhaupt für alle reellen Zahlen x sinnvoll zu definieren. Speziell wurde $x \mapsto a^x$ nicht für irrationale x eingeführt. Dies ist vor allem deshalb so, weil die Menge der reellen Zahlen einer etwas genaueren Einführung bedarf, und in der Schule irrationale Zahlen nur als *nicht-periodische* Zahlen entstanden. Auch hier werden wir jedoch keine in sich geschlossene Definition von $x \mapsto a^x$ machen können, beleuchten jedoch die nötigen Schritte. Diese werden in der Vorlesung Analysis 1 dann gegangen.

7.1 Einführung

Funktionen werden sowohl in der Schule als auch im bisherigen Verlauf dieses Skriptes einfach verwendet. Es hilft jedoch, sich einmal klarzumachen, was alles zu einer Funktion gehört. Deshalb beginnen wir hier mit einer Definition. (Wir stellen außerdem fest, dass in der Schule die Definitions- und Wertemenge einer Funktion selten eine Rolle gespielt haben.)

Definition 7.1 (Funktion). *Eine Funktion besteht aus einer Definitionsmenge A, einer Bildmenge B und einer Zuordnungsvorschrift f. Hierfür schreiben wir*

$$f : \begin{cases} A & \to B,\\ x & \mapsto f(x).\end{cases}$$

Falls Definitions- und Wertebereich klar oder irrelevant sind, kürzen wir auch ab und schreiben $f : x \mapsto f(x)$.

Beispiel 7.2. 1. Die Funktion

$$f : \begin{cases} \mathbb{R} & \to \mathbb{R} \\ x & \mapsto x^2 \end{cases}$$

heißt Quadratfunktion. Für $a_0, ..., a_n \in \mathbb{R}$ heißen Funktionen der Form

$$f : \begin{cases} \mathbb{R} & \to \mathbb{R} \\ x & \mapsto \sum_{k=0}^{n} a_k x^k \end{cases}$$

Polynome.

2. Eine (reellwertige) Folge ist eine Abbildung $a : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ (oder $\mathbb{N}_0 \to \mathbb{R}$). Wir verwenden die Schreibweise $a_n := a(n)$.

7.2 Zahlbereiche

Wie wir in Proposition 2.6 gesehen haben, ist $\sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$. Dies macht es erforderlich, die Menge $\mathbb{Q}$ der rationalen Zahlen zu erweitern. Bekanntlich ist das Ergebnis die Menge der reellen Zahlen, $\mathbb{R}$. Die Differenzmenge, $\mathbb{R}\backslash\mathbb{Q}$, enthält nicht nur Wurzeln, sondern auch andere wichtige Zahlen. Den Beweis folgender Proposition werden Sie in den Übungen genauer ansehen.

Proposition 7.3. *Es gilt* $\pi \notin \mathbb{Q}$.

Beweis. Für $n \in \mathbb{N}$ sei

$$f : \begin{cases} [0,1] & \to \mathbb{R} \\ x & \mapsto \frac{1}{n!} x^n (1-x)^n. \end{cases}$$

Dann ist[11] $f^{(k)}(0), f^{(k)}(1) \in \mathbb{Z}$ für alle $k = 0, 1, 2...$

Warum?

Wir nehmen nun an, es sei $\pi \in \mathbb{Q}$. Dann ist auch $\pi^2 \in \mathbb{Q}$ und es gibt $p, q \in \mathbb{N}$ mit $\pi^2 = \frac{p}{q}$. Wir definieren

$$F(x) := q^n \sum_{k=0}^{n} (-1)^k f^{(2k)}(x) \pi^{2n-2k}.$$

Wegen $q^n \pi^{2n-2k} \in \mathbb{N}$ für alle $k = 0, ..., n$ ist damit $F(0), F(1) \in \mathbb{Z}$.

Warum?

[11] Für eine reellwertige Funktion ist $f^{(k)}$ die k-te Ableitung. Außerdem ist $f^{(0)} := f$.

Weiter ist

$$\begin{aligned}\frac{d}{dx}\Big(F'(x)\sin(\pi x) - \pi F(x)\cos(\pi x)\Big) &= F''(x)\sin(\pi x) + \pi^2 F(x)\sin(\pi x)\\ &= \Big(q^n \sum_{k=0}^{n}(-1)^k f^{(2k+2)}(x)\pi^{2n-2k} + (-1)^k f^{(2k)}(x)\pi^{2n-2k+2}\Big)\sin(\pi x)\\ &= \pi^2 p^n f(x)\sin(\pi x).\end{aligned}$$

Bitte nachrechnen!

Wir erhalten also

$$F(1) + F(0) = \pi p^n \int_0^1 f(x)\sin(\pi x)dx.$$

Warum? Bitte nachrechnen.

Nach Definition von f ist $0 \leq f(x) \leq \frac{1}{n!}$ für alle $x \in [0,1]$. Ist n nun groß, so ist $p^n/n!$ klein, und damit gilt $0 < F(0) + F(1) < 1$, falls n groß genug ist.

Wieso ist $p^n/n!$ klein, wenn n gross ist?

Dies ist ein Widerspruch zu $F(0), F(1) \in \mathbb{Z}$. Damit ist $\pi \notin \mathbb{Q}$. $\square$

Wir werden die reellen Zahlen nicht formal einführen können, und gehen wie in der Schule davon aus, dass es sie gibt. Jedoch wollen wir ein mögliches Vorgehen erläutern, das zu den reellen Zahlen führt. Folgende Forderungen scheinen für $\mathbb{R}$ sinnvoll:

- Alle Rechenregeln für die rationalen Zahlen übertragen sich auf die reellen Zahlen.
- Alle möglichen Grenzwerte (siehe Theorem 6.2) von Folgen rationaler Zahlen sollen in den reellen Zahlen enthalten sein.

Wir haben zwar bereits festgestellt, dass $\sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$. Nach obiger Definition sollten jedoch genau die Grenzwerte von Folgen rationaler Zahlen in $\mathbb{R}$ enthalten sein. Dies ist Motivation für das nächste Beispiel, in dem wir in der Tat eine Folge rationaler Zahlen angeben, die gegen $\sqrt{2}$ konvergieren.

Beispiel 7.4. Wir betrachten eine Folge $(x_n)_{n=1,2,\ldots}$ rationaler Zahlen, die definiert ist durch $x_1 = 2$ und

$$x_{n+1} = \frac{1}{2}\Big(x_n + \frac{2}{x_n}\Big).$$

Diese ist streng monoton fallend und durch $\sqrt{2}$ nach unten beschränkt. Für den Grenzwert x gilt $x^2 = 2$. Insbesondere ist $\sqrt{2}$ Grenzwert einer Folge rationaler Zahlen.
Denn: Zunächst schreiben wir $x_{n+1} = f(x_n)$ für

$$f(x) = \frac{1}{2}\Big(x_n + \frac{2}{x_n}\Big) = \frac{x^2+2}{2x} = x - \frac{x^2-2}{2x}$$

und bemerken, dass

$$f'(x) = \frac{4x^2 - 2(x^2+2)}{4x^2} = \frac{x^2-2}{2x^2}.$$

Also ist f auf $[\sqrt{2}, \infty)$ monoton wachsend. Ist $x_n > \sqrt{2}$, so ist damit auch

$$x_{n+1} = f(x_n) > f(\sqrt{2}) = \sqrt{2}.$$

Damit haben wir gezeigt, dass $x_1, x_2, ... > \sqrt{2}$. Aus der Form von f lesen wir auch ab, dass $(x_n)_{n=1,2,...}$ streng monoton fallend ist. Mit Theorem 6.2 haben wir gezeigt, dass die Folge einen Grenzwert x hat. Nach Definition des Grenzwertes muss $(x_n)_{n=1,2,...}$ und $(x_{n+1})_{n=1,2,...}$ denselben Grenzwert haben. Also gilt

$$x = \lim_{n\to\infty} x_{n+1} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{2}\Big(x_n + \frac{2}{x_n}\Big) = \frac{1}{2}\Big(x + \frac{2}{x}\Big).$$

Löst man diese Gleichung nach x auf, so erhält man $x = \frac{2}{x}$ oder $x^2 = 2$.

7.3 Exponentialfunktionen

Potenzen lernt man in der Schule ab der fünften Klasse. Hier versteht man unter der Exponentialfunktion zur Basis $a \in \mathbb{N}_0$ die Funktion

$$f_a : \begin{cases} \mathbb{N}_0 & \to \mathbb{N} \\ x & \mapsto a^x \end{cases}$$

mit $a^x := \underbrace{a \cdots a}_{x \text{ mal}}$. Wir definieren außerdem $a^0 := 1$. Bereits hier liest man die offensichtlichen Rechenregeln

$$a^x \cdot a^y = a^{x+y}, \tag{1}$$
$$(a^x)^y = a^{xy} \tag{2}$$

ab. In der neunten Klasse kommen nun Potenzen mit negativen Zahlen hinzu, also für $a \in \mathbb{N}_0$

$$f_a : \begin{cases} \mathbb{Z} & \to \mathbb{N} \\ x & \mapsto a^x. \end{cases}$$

Wegen (1) und $a^0 = 1$ muss gelten, dass

$$1 = a^{-x+x} = a^{-x}a^x, \text{ also } a^{-x} = \frac{1}{a^x}.$$

Nachdem in der achten Klasse die reellen Zahlen eingeführt wurden (was nötig war, sonst wäre die Wurzel nicht zu definieren gewesen), gibt es weiter für $a \in \mathbb{R}_+ := (0, \infty)$

$$f_a : \begin{cases} \mathbb{Q} & \to \mathbb{R} \\ x & \mapsto a^x. \end{cases}$$

Hier wird für $\frac{p}{q} \in \mathbb{Q}$

$$a^{p/q} := \sqrt[q]{a^p}$$

definiert. Dies ist die einzige Möglichkeit, (2) zu erweitern, denn es muss ja gelten

$$a^p = (a^p)^{\frac{1}{q}\cdot q} = ((a^p)^{1/q})^q.$$

Laut dieser Gleichheit muss $(a^p)^{1/q}$ eine Zahl sein, deren q-te Potenz a^p ist. Genau so war aber $\sqrt[q]{a^p}$ definiert.

In der Schule wurde jedoch *nicht* definiert, was für $a \in \mathbb{R}_+$ die Funktion

$$f_a : \begin{cases} \mathbb{R} & \to \mathbb{R} \\ x & \mapsto a^x \end{cases}$$

sein soll. Dies wollen wir nun etwas versuchen, und fangen mit einem speziellem Beispiel an.

Proposition 7.5. *Sei $x \in \mathbb{R}_+$. Die Folge $(x_n)_{n=1,2,\ldots}$ mit $x_n = \left(1 + \frac{x}{n}\right)^n$ ist streng monoton wachsend und beschränkt.*

Beweis. Der Beweis erfolgt analog zum Beweis von Theorem 6.9. □

Definition 7.6. *Wir definieren*

$$\exp : \begin{cases} \mathbb{R} & \to \mathbb{R}, \\ x & \mapsto \begin{cases} \lim_{n\to\infty} \left(1 + \frac{x}{n}\right)^n, & \text{falls } x \geq 0, \\ \frac{1}{\exp(|x|)}, & \text{falls } x < 0. \end{cases} \end{cases}$$

Bemerkung 7.7. Wir können an dieser Stelle einige Eigenschaften nicht beweisen:

1. $x \mapsto \exp(x)$ streng monoton steigend.
   Das ist einleuchtend, da ja für $x > 0$ auch $x \mapsto \left(1 + \frac{x}{n}\right)^n$ streng monoton steigend ist.[12] Hieraus folgt jedoch nur, dass $x \mapsto \exp(x)$ monoton steigend ist, aber nicht notwendigerweise die strenge Monotonie.

2. Für jedes $y > 0$ gibt es ein $x \in \mathbb{R}$ mit $y = \exp(x)$.

3. Die Funktion $x \mapsto \exp(x)$ ist differenzierbar mit $\frac{d}{dx}\exp(x) = \exp(x)$.
   Zumindest können wir für $x \geq 0$ schreiben[13]

$$\begin{aligned} \lim_{n\to\infty} \frac{d}{dx}\left(1 + \frac{x}{n}\right)^n &= \lim_{n\to\infty} n\left(1 + \frac{x}{n}\right)^{n-1} \cdot \frac{1}{n} = \lim_{n\to\infty} \left(1 + \frac{x}{n}\right)^{n-1} \\ &= \lim_{n\to\infty} \frac{\left(1 + \frac{x}{n}\right)^n}{1 + \frac{x}{n}} = \exp(x). \end{aligned}$$

[12]Dies ist jedoch kein ausreichendes Argument. Beispielsweise kann man nachrechnen, dass $\lim_{n\to\infty}\Big(1 + \frac{x}{n^2}\Big)^n = 1$ für alle $x > 0$ gilt.

[13]Auch dies ist kein Beweis. Um dies einzusehen, betrachte etwa $f_n : x \mapsto \frac{1}{n}\sin(nx)$. Dann gilt $\lim_{n\to\infty} f(x) = 0$ und damit $\frac{d}{dx}\lim_{n\to\infty} f(x) = 0$, aber

$$\lim_{n\to\infty} \frac{d}{dx}\frac{1}{n}\sin(nx)\Big|_{x=0} = \lim_{n\to\infty} \cos(nx)\big|_{x=0} = 1.$$

Wegen obigen Eigenschaften können wir nun die Logarithmusfunktion definieren.

Definition 7.8. *Wir definieren*[14] $\log : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ *als Umkehrfunktion von* exp.

Da exp und log Umkehrfunktionen voneinander sind, gilt immer $\exp(\log(x)) = \log(\exp(x)) = x$, falls alle Ausdrücke definiert sind. Mit dieser Hilfe und der Rechenregel (2) sind wir nun in der Lage, allgemeine Exponentialfunktionen einzuführen.

Definition 7.9. *Sei $a \in \mathbb{R}_+$. Dann heißt*

$$f_a : \begin{cases} \mathbb{R} & \to \mathbb{R} \\ x & \mapsto a^x := \exp(x \log a) \end{cases}$$

Exponentialfunktion zur Basis a.

[14]Im Unterschied zu den meisten Schulbüchern ist es üblich, den natürlichen Logarithmus mit log und nicht mit ln abzukürzen.

A Griechische Symbole

Kleine und große griechische Buchstaben (wenn sie sich von den lateinischen unterscheiden):

Kleinbuchstabe	Großbuchstabe	Name
α		Alpha
β		Beta
γ	Γ	Gamma
δ	Δ	Delta
ϵ, ε		Epsilon
ζ		Zeta
η		Eta
θ, ϑ	Θ	Theta
ι		Iota
κ		Kappa
λ	Λ	Lambda
μ		My
ν		Ny
ξ	Ξ	Xi
π	Π	Pi
ρ, ϱ		Rho
σ, ς	Σ	Sigma
τ		Tau
υ	Υ	Ypsilon
ϕ, φ	Φ	Phi
χ		Chi
ψ	Ψ	Psi
ω	Ω	Omega