Übungen zur Vorlesung "Stochastik I"

Blatt 7

Abgabetermin: Freitag, 31.01.2025, bis 10.15 Uhr, Briefkästen Math. Institut
(Geben Sie auf jedem Lösungsblatt Ihren Namen und Ihre Übungsgruppe an.
Sie dürfen maximal zu zweit abgeben.)

Aufgabe 1 (4 Punkte)

Es sei Ω eine Menge und $\mathcal{E}$ ein System von Mengen mit $\mathcal{E} \subset \mathcal{P}(\Omega)$. Zeigen Sie, dass

$$\sigma(\mathcal{E}) := \bigcap_{\substack{\mathscr{A} \text{ ist } \sigma\text{-Algebra über } \Omega \\ \mathcal{E} \subset \mathscr{A}}} \mathscr{A}$$

eine σ-Algebra ist.

Aufgabe 2 (4 Punkte)

Zeigen Sie, dass die folgenden Mengen in $\mathscr{B}(\mathbb{R})$, der Borel'schen σ-Algebra über $\mathbb{R}$, liegen:

(a) Jede ein-elementige Teilmenge von $\mathbb{R}$.

(b) Jede endliche Teilmenge von $\mathbb{R}$.

(c) Jede abzählbare Teilmenge von $\mathbb{R}$.

(d) Jedes abgeschlossene, halb-offene oder offene Intervall von $\mathbb{R}$.

(e) Jede offene Teilmenge von $\mathbb{R}$.

(f) Jede abgeschlossene Teilmenge von $\mathbb{R}$.

Aufgabe 3 (4 Punkte)

(a) Es sei $X \sim \mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$. Zeigen Sie, dass $\operatorname{Var}(X) = \sigma^2$.

(b) Es sei $X \sim \mathcal{N}(0,1)$ standardnormalverteilt. Zeigen Sie, dass für $n \in \mathbb{N}$,

$$\mathbb{E}[X^n] = \begin{cases} 0, & \text{falls } n = 2k+1, \\ \frac{(2k)!}{2^k k!}, & \text{falls } n = 2k. \end{cases}$$

(c) Sind X und Y stetige und unabhängige Zufallsvariablen mit Dichte f_X bzw. f_Y, so kann man analog zu Beispiel 3.19 zeigen, dass die Dichte von $X+Y$ gegeben ist durch

$$f_{X+Y}(z) = \int_{\mathbb{R}} f_X(y) f_Y(z-y) dy.$$

Nutzen Sie dies, um für unabhängige normalverteilte Zufallsvariablen $X_1 \sim \mathcal{N}(\mu_1, \sigma_1^2)$ und $X_2 \sim \mathcal{N}(\mu_2, \sigma_2^2)$ zu zeigen, dass $X_1 + X_2 \sim \mathcal{N}(\mu_1 + \mu_2, \sigma_1^2 + \sigma_2^2)$.

(bitte wenden)

Aufgabe 4 (4 Punkte)

(a) Es sei $X \sim \mathcal{U}[0,1]$ die stetige Gleichverteilung auf $[0,1]$. Zeigen Sie, dass für $\lambda > 0$ die Zufallsvariable
$$-\frac{1}{\lambda}\log(1-X)$$
exponentialverteilt zum Parameter λ ist.

(b) Seien X, Y unabhängige exponentialverteilte Zufallsvariablen zum Parameter $\lambda = 1$. Zeigen Sie, dass
$$U = \frac{X}{X+Y}$$
gleichverteilt auf dem Intervall $[0,1]$ ist, d.h. $U \sim \mathcal{U}[0,1]$ gilt.

(c) Es sei φ die Dichte der Standardnormalverteilung und $h : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ eine ungerade Funktion, die stetig auf $[-1,1]$ ist mit $h(x) = 0$ für $x \notin [-1,1]$ und $|h(x)| \leq (2\pi e)^{-1/2}$ für alle $x \in \mathbb{R}$ (z.B. $h(x) = (2\pi e)^{-1/2} x^3 \mathbb{1}_{[-1,1]}(x)$). Wir definieren
$$f(x,y) := \varphi(x)\varphi(y) + h(x)h(y).$$
Zeigen Sie, dass es sich bei f um eine bivariate Dichtefunktion handelt, deren zugehörige Randverteilungen jeweils durch eine Standardnormalverteilung gegeben sind.

Aufgaben zur Selbstkontrolle

(i) Definieren Sie die *bedingte Verteilung* und den *bedingten Erwartungswert* von Y gegeben $X = x$.

(ii) Ein fairer Würfel werde zweimal unabhängig voneinander geworfen. Es bezeichne X die Augenzahl des ersten Wurfs und Y die Augenzahl beider Würfe zusammen. Bestimmen Sie die bedingte Wahrscheinlichkeit von Y gegeben $X = x$ für $x = 1, \dots, 6$.

(iii) Unter welcher Voraussetzung gilt $\mathbb{E}[Y|X] = \mathbb{E}[Y]$ fast sicher?

(iv) Formulieren Sie die diskrete Variante des *Satzes von Fubini*.

(v) Definieren Sie den Begriff *σ-Algebra*.

(vi) Nennen Sie die *Axiome von Kolmogorov* im allgemeinen Fall.

(vii) Was versteht man unter dem Begriff *stetige Verteilung*?

(viii) Zeigen Sie, dass es sich bei $f(x) = 12x^2(1-x)\mathbb{1}_{[0,1]}(x)$ um eine Dichtefunktion handelt.