Übungen zur Vorlesung "Stochastik I"

Blatt 4

Abgabetermin: Freitag, 06.12.2024, bis 10.15 Uhr, Briefkästen Math. Institut
(Geben Sie auf jedem Lösungsblatt Ihren Namen und Ihre Übungsgruppe an.
Sie dürfen maximal zu zweit abgeben.)

Aufgabe 1 (4 Punkte)

Es sei $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega), \mathbb{P})$ ein diskreter Wahrscheinlichkeitsraum und $X : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$ eine diskrete Zufallsvariable.

(a) Zeigen Sie, dass $\mathbb{P}^X$ ein diskretes Wahrscheinlichkeitsmaß auf $(\Omega^X, \mathcal{P}(\Omega^X))$ ist.

(b) Zeigen Sie, dass die Verteilungsfunktion F_X monoton wachsend sowie rechtsseitig stetig ist (d.h. für alle $x_0 \in \mathbb{R}$ gilt $\lim_{x \searrow x_0} f(x) = f(x_0)$), und dass darüber hinaus die beiden Grenzwertaussagen $\lim_{x \to -\infty} F_X(x) = 0$ und $\lim_{x \to \infty} F_X(x) = 1$ gültig sind.

Aufgabe 2 (4 Punkte)

5% aller Fluggäste erscheinen in der Regel nicht zum Abflug. Die Fluggesellschaft verkauft deshalb 95 Tickets für 93 Plätze. Mit welcher Wahrscheinlichkeit erhalten alle Fluggäste einen Platz? Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit exakt und mithilfe des Poisson-Grenzwertsatzes.

Aufgabe 3 (4 Punkte)

Es sei $X \sim \mathrm{Geo}(p)$ geometrisch verteilt zum Parameter $p \in (0,1)$, d.h. $\mathbb{P}(X = k) = p(1-p)^{k-1}$ für $k \in \mathbb{N}$ (vgl. Blatt 2, Aufgabe 1(c)).

(a) Bestimmen Sie $\mathbb{E}X$.

(b) Bestimmen Sie $\mathrm{Var}(X)$.

(c) Zeigen Sie, dass X *gedächtnislos* ist, d.h. dass für $k, l \in \mathbb{N}$ gilt

$$\mathbb{P}\left(X > n + k \mid X > n\right) = \mathbb{P}(X > k).$$

Aufgabe 4 (4 Punkte)

Die Familie der *Panjer-Verteilungen* besteht aus allen Verteilungen auf $(\mathbb{N}_0, \mathcal{P}(\mathbb{N}_0))$, so dass für Parameter $a, b \in \mathbb{R}$ mit $a + b \geq 0$ folgende Rekursionsvorschrift für die Elementarwahrscheinlichkeiten $p_k = \mathbb{P}(\{k\})$, $k = 0, 1, 2, \ldots$, gilt:

$$p_k = \left(a + \frac{b}{k}\right) p_{k-1}, \quad \text{für } k \geq 1.$$

(a) Zeigen Sie, dass für eine Panjer-verteilte Zufallsvariable X, d.h. $\mathbb{P}_X(\{k\}) = \mathbb{P}(X = k) = p_k$ mit p_k wie oben $\mathbb{E}[X^n] = \sum_{k \geq 0} (k+1)^n \left(a + \frac{b}{k+1}\right) p_k$ gilt.

(b) Folgern Sie aus (a), dass

$$\mathbb{E}X = \frac{a+b}{1-a} \qquad \text{und} \qquad \mathrm{Var}(X) = \frac{a+b}{(1-a)^2}.$$

(bitte wenden)

Aufgaben zur Selbstkontrolle

(i) Was versteht man unter einer *diskreten Zufallsvariable* X?

(ii) Es sei X eine diskrete Zufallsvariable. Definieren Sie die *induzierte Verteilung* $\mathbb{P}^X$ und die *Verteilungsfunktion* F_X.

(iii) Was besagt der *Poisson-Grenzwertsatz*?

(iv) Definieren Sie den *Erwartungswert* $\mathbb{E}X$ und die *Varianz* $\mathrm{Var}(X)$ einer diskreten Zufallsvariablen X.

(v) Es sei X Bernoulli-verteilt zum Parameter $p \in (0, 1)$. Bestimmen Sie $\mathbb{E}X$ und $\mathrm{Var}(X)$.

(vi) Gilt für jede diskrete Zufallsvariable X, dass $\mathbb{E}[X^2] = (\mathbb{E}X)^2$?