Übungen zur Vorlesung
"Stochastik I"

Blatt 1

Abgabetermin: Freitag, 25.10.2024, bis 10.15 Uhr, Briefkästen Math. Institut
(Geben Sie auf jedem Lösungsblatt Ihren Namen und Ihre Übungsgruppe an.
Sie dürfen maximal zu zweit abgeben.)

Aufgabe 1 (2 Punkte)

Es sei $\Omega \neq \emptyset$ ein abzählbarer Grundraum und $\mu : \mathcal{P}(\Omega) \longrightarrow [0, \infty]$ ein Abbildung mit $\mu(\Omega) = 1$, welche die Eigenschaften (i) und (iii) aus Definition 1.1 erfüllt. Zeigen Sie, dass dann bereits $\mu(\emptyset) = 0$.

Aufgabe 2 (4 Punkte)

Beweisen Sie Lemma 1.7: Seien $\Omega \neq \emptyset$ eine Grundmenge, I eine beliebige Indexmenge und für alle $i \in I$ sei $A_i \in \mathcal{P}(\Omega)$. Dann gilt

(i) $\left(\bigcap_{i\in I} A_i\right)^c = \bigcup_{i\in I} A_i^c$,

(ii) $\left(\bigcup_{i\in I} A_i\right)^c = \bigcap_{i\in I} A_i^c$.

Aufgabe 3 (4 Punkte)

Beweisen Sie die Eigenschaften (v)-(viii) aus Lemma 1.8: Für einen Grundraum $\Omega \neq \emptyset$ und ein diskretes Maß $\mu : \mathcal{P}(\Omega) \longrightarrow [0, \infty]$ gilt

(v) *Stetigkeit von unten.* Ist A_i, $i \in \mathbb{N}$, eine aufsteigende Folge in $\mathcal{P}(\Omega)$, d.h. $A_i \subset A_{i+1}$ für alle $i \in \mathbb{N}$, so gilt
$$\mu\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\right) = \lim_{n\to\infty} \mu(A_n).$$

(vi) *Stetigkeit von oben.* Ist A_i, $i \in \mathbb{N}$, eine absteigende Folge in $\mathcal{P}(\Omega)$, d.h. $A_i \supset A_{i+1}$ für alle $i \in \mathbb{N}$ und zusätzlich $\mu(A_1) < \infty$, so folgt
$$\mu\left(\bigcap_{i=1}^{\infty} A_i\right) = \lim_{n\to\infty} \mu(A_n).$$

(vii) *Subadditivität.* Für $n \in \mathbb{N}$ und $A_1, \ldots, A_n \in \mathcal{P}(\Omega)$ gilt
$$\mu\left(\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right) \leq \sum_{i=1}^{n} \mu(A_i).$$

(viii) *σ-Subadditivität.* Ist $A_i \in \mathcal{P}(\Omega)$ für alle $i \in \mathbb{N}$, so gilt
$$\mu\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\right) \leq \sum_{i=1}^{\infty} \mu(A_i).$$

(bitte wenden)

Aufgabe 4 (4 Punkte)

Seien $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega), \mu)$ ein diskreter Wahrscheinlichkeitsraum, $n \in \mathbb{N}$ und $A_1, \ldots, A_n \in \mathcal{P}(\Omega)$ Mengen.

(a) Beweisen Sie die sogenannte *Siebformel* für zwei Mengen, d.h. zeigen Sie, dass

$$\mu(A_1 \cup A_2) = \mu(A_1) + \mu(A_2) - \mu(A_1 \cap A_2).$$

(b) Folgern Sie die Siebformel durch vollständige Induktion für allgemeines n, d.h. zeigen Sie, dass

$$\mu\left(\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right) = \sum_{i=1}^{n} (-1)^{i+1} \sum_{\substack{I \subset \{1,\ldots,n\} \\ \#I = i}} \mu\left(\bigcap_{j \in I} A_j\right),$$

wobei $\#I$ die Anzahl der Elemente in der endlichen Menge I bezeichnet.

Aufgaben zur Selbstkontrolle

(i) Was versteht man unter einem *diskreten Wahrscheinlichkeitsraum*?

(ii) Was versteht man unter der σ-Additivität einer Abbildung $\mu : \mathcal{P}(\Omega) \longrightarrow [0, \infty]$?

(iii) Wieso gilt für ein Wahrscheinlichkeitsmaß $\mathbb{P}$ stets $0 \leq \mathbb{P}(A) \leq 1$?

(iv) Wie hängen $\mathbb{P}(A)$ und $\mathbb{P}(A^c)$ für ein Wahrscheinlichkeitsmaß $\mathbb{P}$ zusammen?