UNI FREIBURG

Wahrscheinlichkeitstheorie III

Wintersemester 2024/25

Vorlesung: Prof. Dr. Thorsten Schmidt
Übung: Moritz Ritter

Übungsblatt 13

Abgabe: Freitag, 31.01.2025.

Sei X die Lösung des *Hull-White-extended Vasicek-Modells* (vgl. Aufgabe 3 Blatt 7), das durch die SDE

$$dX_t = (\alpha(t) + \beta X_t)\, dt + \sigma\, dW_t$$

gegeben ist, wobei W eine Brownsche Bewegung, $\beta \in \mathbb{R}$ der Drift, $\sigma \in \mathbb{R}_+$ die Volatilität und $\alpha \in \mathcal{C}(\mathbb{R}_+)$ die Hull-White-Erweiterung ist. Weiter sei der short rate Prozess r gegeben durch

$$r_t = \ell + \lambda X_t,$$

für $\ell \in \mathbb{R}, \lambda \in \mathbb{R}\backslash\{0\}$.

Aufgabe 1 (4 Punkte)**.** Simulieren Sie Pfade der Short Rate und des dazugehörigen Bankkontos für verschiedene Parameterwerte.

Aufgabe 2 (4 Punkte)**.** Berechnen Sie folgende Größen: den Bondpreis $P(0,T)$, die kontinuierlich verzinste Spot Rate $R(0,T)$ und die momentane Forward Rate $f(0,t)$. Vergleichen Sie dazu [1, Section 3]. Visualisieren Sie diese in entsprechenden Plots.

Aufgabe 3 (4 Punkte)**.** Leiten Sie die zugehörige HJM-Gleichung (Heath-Jarrow-Morton-Gleichung) her, die die Dynamik der Forward Rate beschreibt.

Aufgabe 4 (4 Punkte)**.** Bestimmen Sie analytisch die Preise einer europäischen Call-Option auf den T-Bond zum Zeitpunkt $t = 0$. Orientieren Sie sich dabei an Blatt 11, Aufgabe 2. Nutzen Sie zusätzlich eine Monte-Carlo-Simulation, um Ihre analytischen Ergebnisse zu überprüfen.

References

[1] Philipp Harms et al. “Consistent recalibration of yield curve models”. In: *Mathematical Finance* 28.3 (2018), pp. 757–799.