UNI FREIBURG

Wahrscheinlichkeitstheorie III **Wintersemester 2024/25**

Vorlesung: Prof. Dr. Thorsten Schmidt
Übung: Moritz Ritter

Übungsblatt 12

Abgabe: Freitag, 24.01.2025.

Wir betrachten ein stetiges Finanzmarktmodell

$$\mathcal{M} = \{(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{F}, P), T, (S, B)\}$$

mit dem gefilterten Wahrscheinlichkeitsraum $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{F}, P)$ und einem Endzeitpunkt $0 < T < \infty$. Es sei $(S_t)_{t\in[0,T]}$ ein Semimartingal und $(B_t)_{t\in[0,T]}$ ein Prozess gegeben durch $B_t = e^{-\int_t^T r_s ds}$, wobei r_s die shortrate darstellt. Wir nehmen an, dass ein äquivalentes Martingalmaß Q existiert, das den diskontierten Preisprozess zu einem Martingal macht.

Der Preis einer Call-Option ist dann gegeben durch

$$C_t = E_Q\left(e^{-\int_t^T r_s ds} C_T | \mathscr{F}_t\right),$$

wobei $C_T = \max[S_T - K, 0]$ für einen Strike $K > 0$. Im folgenden werden wir einen Fourier basierten Ansatz untersuchen, mit welchem wir in der Lage sind der Wert C_0 zu berechnen.

Definition 1 (Fourier Transformierte). Die Fourier Transformation einer integrierbaren Zufallsvariablen ist gegeben durch

$$\hat{f}(u) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{iux} f(x)\, dx$$

Durch die Fourier-Inversion erhält man

$$f(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-iux} \hat{f}(u)\, du$$

für $u \in \mathbb{R}$ und

$$f(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty+iu_i}^{\infty+iu_i} e^{-iux} \hat{f}(u)\, du,$$

für $u \in \mathbb{C}$ mit $u = u_r + iu_i$, wobei u_r und u_i den Real- bzw. Imaginärteil von u bezeichnen.

Definition 2 (Charakteristische Funktion). Sei X eine Zufallsvariable mit der Wahrscheinlichkeitsdichtefunktion $q(x)$. Die charakteristische Funktion $\hat{q}$ von X ist die Fourier-Transformierte ihrer Dichte:

$$\hat{q}(u) \equiv \int_{-\infty}^{\infty} e^{iux} q(x)\, dx = \mathbb{E}_Q\left(e^{iuX}\right).$$

Aufgabe 1 (Call-Option-Transformation; 4 Punkte)**.** Zeigen Sie Für $u \in \mathbb{R}$ ist die Fourier-Transformierte von $C_T(u) = \max[e^u - K, 0]$ gegeben durch

$$\hat{C}_T(u) = -\frac{K^{iu+1}}{u^2 - iu}.$$

Wir betrachten nun die Fourier-Inversion, wenn $r_t \equiv r \in \mathbb{R}$ konstant ist. Es gilt

$$C_T(s) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty+iu_i}^{\infty+iu_i} e^{-ius} \hat{C}_T(u)\, du.$$

und damit

$$C_0 = e^{-rT} E_Q\left(C_T\right) = \frac{e^{-rT}}{2\pi} E_Q\left(\int_{-\infty+iu_i}^{\infty+iu_i} e^{-ius} \hat{C}_T(u)\, du\right).$$

Mit Fubini erhalten wir

$$C_0 = \frac{e^{-rT}}{2\pi} \int_{-\infty+iu_i}^{\infty+iu_i} E_Q\left(e^{i(-u)\log S_T}\right) \hat{C}_T(u)\, du$$

und insgesamt

$$C_0 = \frac{e^{-rT}}{2\pi} \int_{-\infty+iu_i}^{\infty+iu_i} \hat{C}_T(u) \hat{q}(-u)\, du,$$

wobei $\hat{q}$ die characteristische Funktion von $\log S_T$ unter Q bezeichnet.

Aufgabe 2 (4 Punkte)**.** Zeigen Sie, falls $S_t \equiv S_0 e^{rt+X_t}$ mit X_t ein Lévy-Prozess ist, e^{X_t} ein Martingal ist und $X_0 = 0$, dann gilt:

$$\hat{q}(-u) = e^{-iuy} \varphi(-u), \tag{1}$$

wobei φ die charakteristische Funktion von X_T ist und $y \equiv \log S_0 + rT$.

Mit Aufgabe 2 ergibt sich:

$$C_0 = \frac{e^{-rT}}{2\pi} \int_{-\infty+iu_i}^{\infty+iu_i} e^{-iuy} \hat{C}(u) \varphi(-u)\, du.$$

Definiert man $k = \log(S_0/K) + rT$ und verwendet Aufgabe 1, so erhält man:

$$C_0 = K \frac{e^{-rT}}{2\pi} \int_{-\infty+iu_i}^{\infty+iu_i} \frac{e^{-iuk} \varphi(-u)}{u^2 - iu}\, du.$$

Proposition (Lewis, 2001). Unter der Annahme $u_i \in (0,1)$ ist der Wert der Call-Option gegeben durch:

$$C_0 = S_0 - K \frac{e^{-rT}}{2\pi} \int_{-\infty+iu_i}^{\infty+iu_i} \frac{e^{-iuk} \varphi(-u)}{u^2 - iu}\, du.$$

Setzt man $u_i = 0.5$, ergibt sich:

$$C_0 = S_0 - \sqrt{\frac{S_0 K e^{-rT}}{2\pi}} \int_0^{\infty} \frac{\operatorname{Re}\left[e^{izk} \varphi(z - i/2)\right]}{z^2 + 1/4}\, dz. \tag{6.5}$$

Aufgabe 3 (4 Punkte)**.** Implementieren Sie Funktionen, welche den Wert eines Calls zum Zeitpunkt $t = 0$ im Black-Scholes Modell wie folgt berechnen:

i) Analytisch

ii) Mithilfe numerischer Integration und der obigen Proposition.

iii) Mithilfe einer Monte-Carlo Simulation