UNI FREIBURG

Wahrscheinlichkeitstheorie III **Wintersemester 2024/25**

Vorlesung: Prof. Dr. Thorsten Schmidt
Übung: Moritz Ritter

Übungsblatt 4

Abgabe: Freitag, 15.11.2024.

Aufgabe 1 (6 Punkte)**.** Gegeben seien die Marktmodelle, deren Preise $S_k^{(N)}$ auf einem Wahrscheinlichkeitsraum $(\Omega^{(N)}, \mathcal{F}^{(N)}, P_N^*)$ definiert sind. Dabei ist P_N^* ein Martingalmaß für jedes der Marktmodelle, das heißt, die diskontierten Preisprozesse

$$X_k^{(N)} := \frac{S_k^{(N)}}{(1+r_N)^k}, \quad k = 0, \ldots, N$$

bilden Martingale bezüglich der Filtration $\mathcal{F}_k^{(N)} := \sigma(S_1^{(N)}, \ldots, S_k^{(N)})$.

Wir nehmen weiter an:

1. Die Anfangspreise $S_0^{(N)}$ sind für alle N gleich und konstant, also $S_0^{(N)} = S_0 > 0$.
2. Die Renditen $R_k^{(N)} := \frac{S_k^{(N)} - S_{k-1}^{(N)}}{S_{k-1}^{(N)}}$ für $k = 1, \ldots, N$ sind unabhängig unter P_N^* und erfüllen
$$-1 < a_N \leq R_k^{(N)} \leq b_N, \quad \text{für alle } k = 1, \ldots, N,$$
wobei $a_N \to 0$ und $b_N \to 0$ für $N \to \infty$ gilt.
3. Die Varianzen $\mathrm{var}_N(R_k^{(N)})$ unter P_N^* sind so, dass
$$\sigma_N^2 := \frac{1}{T} \sum_{k=1}^{N} \mathrm{var}_N(R_k^{(N)}) \to \sigma^2 \in (0,1)$$
für $N \to \infty$ konvergiert.

Zeigen Sie unter diesen Annahmen, dass die Verteilungen der Endwerte $S_N^{(N)}$ unter P_N^* schwach gegen eine log-normal verteilte Zufallsvariable S_T mit den Parametern

$$\log S_0 + rT - \frac{1}{2}\sigma^2 T \quad \text{und} \quad \sigma\sqrt{T}$$

konvergieren. Die Verteilung der Grenzzufallsvariablen S_T lässt sich darstellen als

$$S_T := S_0 \exp\left(\sigma W_T + \left(r - \frac{1}{2}\sigma^2\right) T\right),$$

wobei W_T eine normalverteilte Zufallsvariable $N(0,T)$ mit Erwartungswert 0 und Varianz T ist.

Hinweis: Verwenden Sie Theorem A.41. in [1]. Dazu betrachten Sie die Taylorentwicklung von $\log(1+x)$ und erhalten damit eine geeignete Darstellung für $\log(S^{(N)})$.

Aufgabe 2 (4 Punkte)**.** Zeigen Sie, dass die Folge von Endwerten $S_N^{(N)}$ der Binomial Modelle aus Blatt 3 für $r = r_N = rT/N$, $a = a_N = e^{-\sigma\sqrt{T/N}} - 1$ und $b = b_N = e^{-\sigma\sqrt{T/N}} - 1$ schwach konvergiert und bestimmen Sie den Grenzwert.

Aufgabe 3 (Das Black-Scholes-Modell; 6 Punkte). Wir betrachten das zweidimensionale Semimartingal $\tilde{S} = (\tilde{S}_t^0, \tilde{S}_t^1)_{t\geq 0} \in \mathscr{S}$ welches für $r > -1, \mu \in \mathbb{R}, \sigma \in \mathbb{R}_+$ und einer (bezüglich dem Maß P) Standard Brown'schen Bewegung W folgende Darstellung besitzt

$$d\tilde{S}_t^0 = r\tilde{S}_t^0 dt$$

und

$$d\tilde{S}_t^1 = \mu\tilde{S}_t^1 dt + \sigma\tilde{S}_t^1 dW_t.$$

Geben Sie eine explizite Form von $\tilde{S}$ an. Zeigen Sie, dass es zu fixem $T > 0$ ein zu P_T äquivalentes Maß Q_T gibt, sodass der Prozess S gegeben durch $S = \tilde{S}/\tilde{S}^0 = (1, \tilde{S}^1/\tilde{S}^0)$ ein lokales Martingal bis T ist.

References

[1] Hans Föllmer and Alexander Schied. *Stochastic finance: an introduction in discrete time.* Walter de Gruyter, 2016.