Stochastische Prozesse

Wintersemester 2023/24

Vorlesung: Prof. Dr. Thorsten Schmidt
Übung: Moritz Ritter

Übungsblatt 13

Abgabe: Freitag, 02.02.2024.

Definition 1 (T-Forward Measure). Sei $(B_t)_{t\leq T}$, $B_t = e^{\int_0^t r_s ds}$ der Bankkonto/Numéraire in einem Finanzmarkt. Wenn $\mathbb{Q}$ ein risikoneutrales Maß ist, dann ist das Forward measure $\mathbb{Q}^T$ auf $\mathscr{F}_T$ definiert durch den Radon-Nikodym-Dichteprozess Z bezüglich $\mathbb{Q}$, gegeben durch

$$Z_t = \frac{P_t(T)}{P_0(T)B_t}.$$

Definition 2 (Zero-Coupon Bond). Der Prozess $(P_t(T))_{t\geq T}$ bezeichne den Preis einer Geldeinheit bei T am Zeitpunkt $t \leq T$. Dieser wird zero-coupon bond (Nullkuponanleihe) genannt.

Aufgabe 1 (4 Punkte)**.** Sei $F_t(T,S)$ die einfache Forward Rate für $[T,S]$ zum Zeitpunkt t gegeben durch

$$F_t(T,S) = \frac{1}{S-T}\left(\frac{P_t(T)}{P_t(S)} - 1\right), \quad t \in [0,T].$$

Erklären Sie die Forward Rate in eigenen Worten. Zeigen Sie, dass $(F_t(T,S))_{t\in[0,T]}$ ein Martingal bezüglich Q^S ist; das heißt

$$F_t(T,S) = E_{Q^S}[F_T(T,S)|\mathscr{F}_t] \quad \text{für alle } t \in [0,T].$$

Hinweis. Verwenden Sie die Identität

$$P_t(T) = B_t\, E_Q\left[\frac{1}{B_T}\,\middle|\, \mathscr{F}_t\right], \quad t \in [0,T].$$

Aufgabe 2 (12 Punkte)**.** Betrachten Sie das Modell für die Instantaneous Forward Rate

$$f_t(T) = f_0(T) + \int_0^t \alpha_s(T)ds + \int_0^t \sigma_s(T)dW_s,$$

mit einem Standard-Q-Wienerprozess W. Hierbei gilt folgende Gleichheit:

$$P_t(T) = \exp\Big(-\int_t^T f(t,s)ds\Big)$$

Wir fixieren T und S.

1. Zeigen Sie, dass der Dichteprozess von Q^S bezüglich Q^T gegeben ist durch

$$\frac{P_0(T)}{P_0(S)}\frac{P(S)}{P(T)}.$$

2. Zeigen Sie, dass der Dichteprozess von Q^S bezüglich Q^T auch gegeben ist durch

$$\mathcal{E}\big((\Sigma(S) - \Sigma(T)) \cdot W^{(T)}\big),$$

wobei $\Sigma_t(T) = -\int_t^T \sigma_t(s)ds$ und $W^{(T)} = W - \Sigma(T) \cdot \lambda$ für $t \in [0, T]$ (hier bezeichnet λ das Lebesgue-Maß) und $\mathcal{E}$ das stochastische Exponential.

Hinweis: Sie dürfen ohne Beweis verwenden, dass folgende Gleichheit gilt

$$\frac{P_t(T)}{P_0(T)} = B_t \mathcal{E}(\Sigma(T) \cdot W)_t,$$

hierbei bezeichnet $B_t = \exp(-\int_0^t r_s ds)$ *den Bankaccount mit Short Rate* $r_t = f_t(t)$. *Für zwei stetige Semimartingale* $X = X_0 + M + A$ *und* $Y = Y_0 + N + B$ *gilt*

$$\frac{\mathcal{E}(X)}{\mathcal{E}(Y)} = \mathcal{E}\big(X - Y - \langle M - N, N \rangle\big).$$

3. Nun nehmen wir an, dass $T < S$ und setzen einen Ausübungspreis $K > 0$ fest. Wir betrachten den Preis einer europäischen Call-Option auf den S-Bond zum Zeitpunkt $t = 0$, gegeben durch

$$\pi = E_Q\left[\frac{(P_T(S) - K)^+}{B_T}\right].$$

Zeigen Sie, dass

$$\pi = P_0(S) Q^S\left(\ln\left(\frac{P_T(T)}{P_T(S)}\right) \leq \ln\left(\frac{1}{K}\right)\right) - K P_0(T) Q^T\left(\ln\left(\frac{P_T(S)}{P_T(T)}\right) \geq \ln(K)\right).$$

4. Ab jetzt nehmen wir an, dass die Volatilität $\sigma_s(T)$ deterministisch ist. Zeigen Sie, dass $\ln(\frac{P_T(T)}{P_T(S)})$ unter Q^S normalverteilt ist, und bestimmen Sie die Parameter.

5. Zeigen Sie, dass $\ln(\frac{P_T(S)}{P_T(T)})$ unter Q^T normalverteilt ist, und bestimmen Sie die Parameter.

6. Zeigen Sie, dass der Optionspreis gegeben ist durch

$$\pi = P_0(S)\Phi(d_1) - K\, P_0(T)\Phi(d_2),$$

wobei Φ die Verteilungsfunktion der Standardnormalverteilung ist, und

$$d_{1,2} = \frac{\ln(\frac{P_0(S)}{K P_0(T)}) \pm \frac{1}{2}\int_0^T |\Sigma_s(T) - \Sigma_s(S)|^2 ds}{\sqrt{\int_0^T |\Sigma_s(T) - \Sigma_s(S)|^2 ds}}.$$