Stochastische Prozesse

Wintersemester 2023/24

Vorlesung: Prof. Dr. Thorsten Schmidt
Übung: Moritz Ritter

Übungsblatt 1

Abgabe: Freitag, 27.10.2023.

Aufgabe 1 (5 Punkte)**.** Zeigen Sie:

i) Sind X und Y zwei ununterscheidbare Prozesse, dann sind X und Y Modifikationen voneinander.

ii) Ist die Indexmenge I, in welcher die Prozesse indiziert sind, höchstens abzählbar, dann sind die Eigenschaften Ununterscheidbar und Modifikation äquivalent.

iii) Gilt $I = \mathbb{R}_+$ und sind X und Y rechtsstetige (linksstetige) Prozesse, dann sind die Eigenschaften Ununterscheidbar und Modifikation äquivalent.

iv) Sei $I = \mathbb{R}_+$ und die Prozesse X und Y gegeben durch $X_t = 0$ und $Y_t = 1_{\{Z=t\}}$ für alle $t \in \mathbb{R}_+$ und eine Zufallsvariable $Z \sim \mathrm{Exp}(\lambda)$. Welche Aussagen bezüglich Modifikation und Ununterscheidbarkeit lassen sich treffen?

v) Geben Sie ein Beispiel von zwei stetigen Prozessen an, die zwar ununterscheidbar, aber nicht gleich sind.

Aufgabe 2 (3 Punkte)**.** Sei T eine Stoppzeit. Zeigen Sie folgende Aussagen

i) Die σ-Algebra der T-Vergangenheit, definiert durch

$$\mathscr{F}_T := \{A \in \mathscr{A} | A \cap \{T \le t\} \in \mathscr{F}_t \text{ für alle } t \in \mathbb{R}_+\}$$

ist eine σ-Algebra.

ii) Für die Stoppzeit $T \equiv t$ stimmt diese mit $\mathscr{F}_t$ überein für alle $t \ge 0$.

iii) Sind T und S Stoppzeiten mit $T \le S$, so gilt $\mathscr{F}_T \subset \mathscr{F}_S$.

Aufgabe 3 (4 Punkte)**.** i) Zeigen Sie: Ist X ein adaptierter càdlàg Prozess, dann sind X_- und ΔX ebenfalls adaptiert.

ii) Gilt folgende Umkehrung: Wenn X càdlàg und X_- adaptiert ist, dann ist X adaptiert?

Aufgabe 4 (4 Punkte)**.** Zeigen Sie die Existenz eines Grundraums Ω und Zufallsvariablen $X_t \colon \Omega \to \mathbb{R}$, sodass folgende Eigenschaften erfüllt sind:

i) $X_t \sim \mathcal{N}(t, 1)$ und

ii) $(X_t)_{t \ge 0}$ sind stochastisch unabhängig.

Besitzt $(X_t)_{t\ge0}$ eine stetige Modifikation?

Hinweis: Für diese Aufgabe ist es notwendig die Begriffe Produktraum, Produkt-σ-Algebra und Produktmaß (auch für überabzählbare Indexmengen) gut zu verstehen. Eine Wiederholung finden Sie beispielsweise in [1, Kapitel 14]. Die Existenz eines Produktmaßes für überabzählbare Produkte erhalten Sie mit dem Satz von Andersen-Jessen.

References

[1] Achim Klenke. *Wahrscheinlichkeitstheorie*. Vol. 1. Springer, 2006.