Stochastische Prozesse **Wintersemester 2023/24**

Vorlesung: Prof. Dr. Thorsten Schmidt
Übung: Moritz Ritter

Übungsblatt 10

Abgabe: Freitag, 12.01.2023.
Aufgabe 1 (Black-Scholes-Modell; 4 Punkte)**.** Zeigen Sie, dass das Semimartingal

$$X_t = X_0 e^{\sigma W_t + t(\mu - \sigma^2/2)}$$

für $\mu \in \mathbb{R}, \sigma \in \mathbb{R}_+$ und einer Standard Brown'schen Bewegung W folgende Darstellung besitzt

$$dX_t = \mu X_t dt + \sigma X_t dW_t = X_t d(\mu t + \sigma W_t).$$

Aufgabe 2 (Vasicek-Modell; 4 Punkte)**.** Zeigen Sie, dass das Semimartingal

$$X_t = X_0 e^{-at} + b(1 - e^{-at}) + \sigma e^{-at} \int_0^t e^{as} dW_s$$

für $b, \sigma \in \mathbb{R}, a \geq 0$ und einer Standard Brown'schen Bewegung W folgende Darstellung besitzt

$$dX_t = a(b - X_t)dt + \sigma dW_t.$$

Aufgabe 3 (4 Punkte)**.** Wir betrachten das zweidimensionale Semimartingal $\tilde{S} = (\tilde{S}_t^0, \tilde{S}_t^1)_{t \geq 0} \in \mathscr{S}$ welches für $r > -1, \mu \in \mathbb{R}, \sigma \in \mathbb{R}_+$ und einer (bezüglich dem Maß P) Standard Brown'schen Bewegung W folgende Darstellung besitzt

$$d\tilde{S}_t^0 = r \tilde{S}_t^0 dt$$

und

$$d\tilde{S}_t^1 = \mu \tilde{S}_t^1 dt + \sigma \tilde{S}_t^1 dW_t.$$

Geben Sie eine explizite Form von $\tilde{S}$ an. Zeigen Sie, dass es zu fixem $T > 0$ ein zu P_T äquivalentes Maß Q_T gibt, sodass der Prozess S gegeben durch $S = \tilde{S}/\tilde{S}^0 = (1, \tilde{S}^1/\tilde{S}^0)$ ein lokales Martingal bis T ist.
Hinweis: Verwenden Sie die Aussage aus Aufgabe 16 aus dem Skript (ohne Beweis).

Definition 1. Ein *einfacher Prozess* H (in Finanzmathe auch: *einfache Handelsstrategie*) ist ein $\mathbb{R}$-wertiger adaptierter stochastischer Prozess der Form

$$H = \sum_{i=1}^n h_i \mathbb{1}_{\rrbracket \tau_{i-1}, \tau_i \rrbracket}$$

für endliche Stoppzeiten $0 \leq \tau_0 \leq \tau_1 \leq \cdots \leq \tau_n < \infty$ und $h_i \in L^\infty(\mathscr{F}_{\tau_{i-1}})$ für alle $i = 1, \ldots, n$.

Aufgabe 4 (4 Punkte)**.** Sei S ein lokal beschränkter càdlàg Prozess. Die Menge $K^{simple} \subset L^\infty(\Omega, \mathscr{A}, P)$ sei gegeben durch

$$K^{simple} := \{(H \cdot S)_\infty | H = \sum_{i=1}^n h_i \mathbb{1}_{\rrbracket \tau_{i-1}, \tau_i \rrbracket} \text{ einfacher Prozess, } S^{\tau_n} \text{ beschränkt}\}.$$

Weiter existiere ein Maß Q mit den Eigenschaften

1. $Q \sim P$, d.h. Q ist äquivalent zu P, und
2. der Prozess S ist ein lokales Martingal unter Q.

Sei weiter $L^\infty_+(\Omega, \mathscr{A}, P) := \{f \in L^\infty(\Omega, \mathscr{A}, P) | f \geq 0\}$. Zeigen Sie

$$K^{simple} \cap L^\infty_+(\Omega, \mathscr{A}, P) = \{0\}.$$

Formulieren Sie eine ökonomische interpretation dieser Aussage.

Hinweis: Verwenden Sie Aufgabe 5.

Aufgabe 5 (Bonus 4 Punkte)**.** Zeigen Sie: Ein lokal beschränkter càdlàg Prozess S ist ein lokales Martingal genau dann, wenn

$$E\left[(H \cdot S)_\infty\right] = 0,$$

für alle einfachen Prozesse $H = \sum_{i=1}^n h_i \mathbb{1}_{]\!]\tau_{i-1}, \tau_i]\!]}$, sodass S^{τ_n} beschränkt ist.

Hinweis: Betrachten Sie eine lokalisierende Folge von Stoppzeiten $(T_n)_{n \in \mathbb{N}}$, sodass S^{T_n} ein beschränkter Prozess ist. Die Martingaleigenschaft von S^{T_n} folgt nun, falls $E\left[S^{T_n}_{\sigma_2} | \mathscr{F}_{\sigma_1}\right] = S^{T_n}_{\sigma_1}$ für alle Stoppzeiten $\sigma_1 \leq \sigma_2 \leq T_n$ (Diese Aussage muss ebenfalls gezeigt werden).