Übungen zur Vorlesung
"Lineare Algebra I"

Blatt 3

Abgabetermin: Donnerstag, 09.11.2023, bis 10.00 Uhr in den Briefkästen im Math. Institut. (Geben Sie auf jedem Lösungsblatt Ihren Namen und Ihre Übungsgruppe an. Sie dürfen maximal zu zweit abgeben.)

Aufgabe 1 (4 Punkte)

Entscheiden Sie für die folgenden Mengen G und die angegebenen Verknüpfungen $*$, ob es sich bei $(G, *)$ um eine Gruppe handelt:

(a) $G = \{f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, f(x) = ax + b \mid a, b \in \mathbb{R}\}$ und $g * f = f \circ g$ für $f, g \in G$.

(b) $G = \mathbb{Z}$ und $m * n = m - n$ für $m, n \in G$.

(c) $G = \mathbb{R}^2 \backslash \{(0,0)\}$ und $(x_1, y_1)*(x_2, y_2) = (x_1x_2 - y_1y_2, x_1y_2 + x_2y_1)$ für $(x_1, y_1), (x_2, y_2) \in G$.

(d) Es sei $(H, \cdot)$ eine gegebene Gruppe und $G = \{V \mid V \subset H\}$ die Menge aller Teilmengen von H mit Verknüpfung $A * B = \{a \cdot b \mid a \in A, b \in B\}$ für $A, B \in G$.

Aufgabe 2 (4 Punkte)

Es sei G eine nichtleere Menge zusammen mit einer Verknüpfung $* : G \times G \to G$, $(g, h) \mapsto g*h$, sodass

(i) die Verknüpfung $*$ assoziativ ist,

(ii) ein *links-neutrales Element* existiert, d.h. ein $e \in G$ mit $e * g = g$ für alle $g \in G$, und

(iii) für jedes $g \in G$ ein *links-inverses Element* existiert, d.h. dass ein $g' \in G$ existiert mit $g' * g = e$.

Beweisen Sie, dass $(G, *)$ eine Gruppe ist.

Aufgabe 3 (4 Punkte)

Es sei S_7 die symmetrische Gruppe auf der Menge $\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$.

(a) Geben Sie $(135)(27) \in S_7$ in Permutationsschreibweise an.

(b) Geben Sie

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 3 & 6 & 1 & 2 & 4 & 7 & 5 \end{pmatrix}$$

in Zyklenschreibweise an.

(c) Es seien $\sigma, \tau \in S_7$, wobei $\sigma = (123)(46)$ und $\tau = (23456)$. Bestimmen Sie $\sigma \circ \tau$ und $\tau \circ \sigma$ in Permutations- und Zyklenschreibweise. Ist S_7 abelsch?

(d) Bestimmen Sie die Inversen von (1234) und $(123)(45)$ in S_7.

(bitte wenden)

Aufgabe 4 (4 Punkte)

Wie in Aufgabe 4 von Blatt 2 sei eine Äquivalenzrelation $\sim$ auf $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ definiert durch $(m, n) \sim (p, q) \Leftrightarrow m + q = n + p$. Auf der Menge der Äquivalenzklassen $(\mathbb{N} \times \mathbb{N})/\sim$ definieren wir eine Verknüpfung $+$ durch

$$[(m,n)] + [(p,q)] = [(m+p, n+q)] \quad \text{für alle } [(m,n)], [(p,q)] \in (\mathbb{N} \times \mathbb{N})/\sim .$$

(a) Zeigen Sie, dass die Verknüpfung $+$ wohldefiniert ist, d.h. nicht von der Wahl der Repräsentanten (m, n) der Äquivalenzklasse $[(m, n)]$ abhängig ist.

(b) Zeigen Sie, dass $((\mathbb{N} \times \mathbb{N})/\sim, +)$ eine abelsche Gruppe ist.

(c) Beweisen Sie, dass die Gruppen $((\mathbb{N} \times \mathbb{N})/\sim, +)$ und $(\mathbb{Z}, +)$ isomorph sind.

Aufgaben zur Selbstkontrolle

(i) Definieren Sie den Begriff *Gruppe*.

(ii) Geben Sie drei Beispiele einer Gruppe.

(iii) Zeigen Sie, dass das neutrale Element einer Gruppe eindeutig ist.

(iv) Was versteht man unter der *symmetrischen Gruppe* und unter einer *Permutation*?

(v) Definieren Sie den Begriff Gruppenhomomorphismus.

Erstsemester-Hütte

Bald ist es endlich soweit und es geht auf die Erstihütte. Alles, was ihr dazu wissen müsst, erfahrt ihr hier:

Wann geht's los?

Am Freitag, den **8.12**. und zurück kommen wir am Sonntag, den **10.12.**

ca. 9 Uhr für die Wanderung zur Hütte

14 Uhr für alle Anderen

Wo geht es eigentlich hin?

Wir fahren ins Dekan-Strohmeier-Haus im Münstertal im Schwarzwald

Was tut man eigentlich auf so einer Hütte?

Sich entspannen, Mitstudis kennenlernen, an lustigen Workshops teilnehmen, Spielchen spielen, lecker essen, …

Und was kostet das?

40 Euro, die bei der Anmeldung mitzubringen sind!

Was für eine Anmeldung?

Am Donnerstag, den 16. November, könnt ihr euch nach der Vorlesung **um 10.00 vor der Mathe-Fachschaft** verbindlich anmelden. Bitte **bringt die 40 Euro mit**, nur dann bekommt ihr einen sicheren Platz, denn die Teilnehmerzahl ist beschränkt.

Die 40 € sind **nicht kostendeckend**, das heißt, wenn ihr doch nicht kommt, können wir euch das Geld leider nicht zurückerstatten. Die Anmeldung ist also **verbindlich**!

Bei der Anmeldung brauchen wir von euch folgende Infos:

- Name, Geburtsdatum und E-Mail!
- Habt ihr ein Semesterticket?
- Könntet ihr ein Auto zur Verfügung stellen?
- Seid ihr Veganer o.ä. oder habt ihr Allergien, Unverträglichkeiten,…?
- Bringt ihr einen Kuchen mit?
- Wollt ihr zur Hütte wandern?

Und mein Mathe-Zettel?

Die Erfahrung hat gezeigt, dass dafür immer genug Zeit blieb und da noch viele ältere Mathestudis mitfahren, könnt ihr bestimmt auch den einen oder anderen Tipp bekommen…

Wenn ihr noch Fragen habt, dann mailt uns an **erstis@math.uni-freiburg.de**

Clara, Moritz, Jannek und die Mathefachschaft