Übungen zur Vorlesung „Hidden Markov Models“

Blatt 4

Abgabetermin: Dienstag, 14.11.2023, bis 14:15 Uhr in der Vorlesung.
(Bitte nur maximal zu zweit abgeben.)

Aufgabe 1 (2 Punkte)

Im Beweis von Satz 2.7 der Vorlesung wurde die bedingte Verteilung $\pi_{k|N}$ für $k > N$ hergeleitet. Führen Sie einen alternativen Beweis der Vorhersagerekursion mithilfe der Bayes-Formel.

Aufgabe 2 (4 Punkte)

Seien $(X, \mathcal{X})$ und $(Y, \mathcal{Y})$ Signal- und Beobachtungsraum, Q und Q' Markovsche Übergangskerne auf $(X, \mathcal{X})$ sowie ν und ν' zwei Startverteilungen auf $(X, \mathcal{X})$. Sei G ein Beobachtungskern von $(X, \mathcal{X})$ nach $(Y, \mathcal{Y})$, der die Nicht-Degeneriertheitsannahme erfüllt. Beweisen Sie, dass die Tripel (ν, Q, G) und (ν', Q', G) zwei Hidden-Markov-Modelle definieren, welche Anlass zu Beobachtungssegmenten $(Y_k)_{0\leq k\leq N}$ geben, deren Verteilungen zueinander absolutstetig sind.

Aufgabe 3 (2 Punkte)

Seien $(X, \mathcal{X})$ ein messbarer Raum und ξ ein signiertes Maß darauf mit $\sup_{A\in\mathcal{X}} |\xi(A)| < \infty$. Seien weiter (H_1, H_1^c) und (H_2, H_2^c) zwei Hahn-Zerlegungen, d.h. $\xi(A) \geq 0$ für alle $A \in H_i \cap \mathcal{X}$ sowie $\xi(B) \leq 0$ für alle $B \in H_i^c \cap \mathcal{X}$, $i = 1, 2$. Zeigen Sie, dass (H_1, H_1^c) und (H_2, H_2^c) dieselbe Hahn-Jordan-Zerlegung $\xi = \xi_+ - \xi_-$ mit singulären Maßen ξ_+ und ξ_- induzieren.

Aufgabe 4 (4 Punkte)

Beweisen Sie mithilfe der Hahn-Jordan-Zerlegung das Lemma 2.8 der Vorlesung:

(i) Für $\xi \in \mathcal{M}(X, \mathcal{X})$ und $f \in \mathcal{F}_b(X, \mathcal{X})$ gilt

$$\left| \int_X f d\xi \right| \leq \|\xi\|_{TV} \|f\|_{\sup}.$$

(ii) Für $\xi \in \mathcal{M}(X, \mathcal{X})$ ist

$$\|\xi\|_{TV} = \sup\left\{ \int_X f\xi(dx) : f \in \mathcal{F}_b(X, \mathcal{X}), \|f\|_{\sup} = 1 \right\}.$$

(iii) Für $f \in \mathcal{F}_b(X, \mathcal{X})$ ist

$$\|f\|_{\sup} = \sup\left\{ \int_X f\xi(dx) : \xi \in \mathcal{M}(X, \mathcal{X}), \|\xi\|_{TV} = 1 \right\}.$$