Übungen zur Vorlesung „Hidden Markov Models“

Blatt 13

Abgabetermin: Dienstag, 30.01.2024, bis 14:15 Uhr in der Vorlesung.
(Bitte nur maximal zu zweit abgeben.)

Aufgabe 1 (4 Punkte)

Für ein HMM mit Übergangskern Q gäbe es ein $\epsilon \in (0,1)$ und ein Wahrscheinlichkeitsmaß κ auf $(X, \mathcal{X})$ mit

$$\epsilon\kappa(A) \leq Q(x, A) \leq \frac{1}{\epsilon}\kappa(A), \quad x \in X,\, A \in \mathcal{X}.$$

Zeigen Sie für zwei beliebige Wahrscheinlichkeitsmaße μ, μ' auf $(X, \mathcal{X})$, dass

$$\|F_j \cdots F_1\mu - F_j \cdots F_1\mu'\|_{TV} \leq \epsilon^{-2}(1-\epsilon^2)^j\|\mu - \mu'\|_{TV},$$

wobei

$$F_l\mu(A) := \frac{\int \mathbb{1}_A(x)\gamma(x, y_l)Q(x', dx)\mu(dx')}{\int \gamma(x, y_l)Q(x', dx)\mu(dx')}, \quad l = 1, \dots, j$$

für ein fixes $y_l \in Y$.
`Hinweis: Benutzen Sie Gleichung (2.24) im Skript. Diese Aufgabe gibt 4 Bonuspunkte.`

Aufgabe 2 (8 Punkte)

Definiere die Abbildung $T\colon \Theta \to \Theta$ durch $T(\theta') := \operatorname{argmax} R_N(\theta, \theta')$. Wir nehmen an, dass

a) Θ ist eine offene Teilmenge des $\mathbb{R}^p$,

b) $R_N(\theta, \theta')$ und L_N^θ sind stetig differenzierbar bezüglich θ für jedes fixe θ',

c) $R_N(\theta, \theta')$ ist strikt konkav bezüglich θ für jedes fixe θ',

d) $R_N(\theta, \theta')$ hat eine eindeutige Maximalstelle $T(\theta')$ für jedes fixe θ',

e) und die Abbildung T sei stetig.

Zeigen Sie die folgenden Aussagen:

(i) Sei $\theta \in \Theta$ mit $L_N^\theta = L_N^{T(\theta)}$. Dann ist θ ein Fixpunkt der Abbildung T.

(ii) Für fixes $\theta' \in \Theta$ definieren wir die Funktion $f(\theta) := \log L_N^\theta - \log L_N^{\theta'} - R_N(\theta, \theta')$. Dann ist die Funktion f stetig differenzierbar mit $f \geq 0$ und $f(\theta') = 0$. Insbesondere gilt $\nabla \log L_N^\theta = \nabla R_N(\theta, \theta')_{|\theta=\theta'}$.

(iii) Sei θ ein Fixpunkt der Abbildung T. Dann gilt $\nabla \log L_N^\theta = 0$.

(iv) Für $\theta^0 \in \Theta$ definieren wir die Folge $\theta^k := T(\theta^{k-1})$, $k \geq 1$. Angenommen, es gilt $\theta^k \to \theta \in \Theta$. Dann folgt $\nabla \log L_N^\theta = 0$.