Übungen zur Vorlesung „Hidden Markov Models“

Blatt 10

Abgabetermin: Dienstag, 09.01.2024, bis 14:15 Uhr in der Vorlesung.
(Bitte nur maximal zu zweit abgeben.)

Aufgabe 1 (8 Punkte)

Ziel dieser Aufgabe ist es die SIS- und SISR-Algorithmen zu erweitern um die Verteilung des gesamten Pfades $P^{X_0,\ldots,X_k|Y_0,\ldots,Y_k}$ zu approximieren, das heißt

$$\int f(x_0,\ldots,x_k)P^{X_0,\ldots,X_k|Y_0,\ldots,Y_k}(dx_0,\ldots,dx_k) \approx \sum_{i=1}^n w_k^{(i)} f(x_0^{(k,i)},\ldots,x_k^{(k,i)}).$$

(i) Modifizieren sie den SIS-Algorithmus derart, dass die Verteilung des gesamten Pfades berechnet wird.

(ii) Zeigen sie folgende Rekursionsformel für die Pfad-Verteilung:

$$\begin{aligned}&\int f(x_0,\ldots,x_k)P^{X_0,\ldots,X_k|Y_0,\ldots,Y_k}(dx_0,\ldots,dx_k)\\ &\quad= \frac{\int f(x_0,\ldots,x_k)\gamma(x_k,y_k)Q(x_{k-1},dx_k)P^{X_0,\ldots,X_{k-1}|Y_0,\ldots,Y_{k-1}}(dx_0,\ldots,dx_{k-1})}{\int \gamma(x_k,y_k)Q(x_{k-1},dx_k)P^{X_0,\ldots,X_{k-1}|Y_0,\ldots,Y_{k-1}}(dx_0,\ldots,dx_{k-1})},\end{aligned}$$

wobei f eine beschränkte messbare Funktion sei.

(iii) Modifizieren sie mithilfe der obigen Rekursionsformel den SISR-Algorithmus derart, dass die Verteilung des gesamten Pfades berechnet wird.

Aufgabe 2 (4 Punkte)

Wir betrachten ein HMM mit $X = Y = \mathbb{R}$ und

$$X_k = F(X_{k-1}) + \xi_k,$$

wobei $F\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ beschränkt sei. Untersuchen sie für dieses Modell die Gültigkeit der Atar-Zeitouni-Bedingung im Falle dass

(i) die ξ_k iid sind mit $\xi_k \sim \delta_0$,

Hinweis: Unterscheiden sie zwischen den Fällen, dass F konstant ist oder (mindestens) zwei verschiedene Werte annimmt.

(ii) $F(\mathbb{R}) \subseteq [0,1]$ und die ξ_k iid Laplace-verteilt sind mit Dichte $\frac{1}{2}e^{-|x|}$ bezüglich dem Lebesgue-Maß.

Hinweis: Ist $\mu \in \mathbb{R}$ und ξ Laplace-verteilt, so hat die Verteilung von $\mu + \xi$ die Dichte $\frac{1}{2}e^{-|x-\mu|}$ bezüglich dem Lebesgue-Maß. Finden sie (punktweise für $x \in \mathbb{R}$) eine geeignete untere und obere Schranke für diesen Ausdruck.