

# Übungen zur Vorlesung „Hidden Markov Models“

## Bonusblatt

**Abgabetermin:** Dienstag, 24.10.2023, bis 14:15 Uhr in der Vorlesung.

(Sie dürfen maximal zu zweit abgeben.)

### Aufgabe 1

(4 Punkte)

a) Beweisen Sie die Chapman-Kolmogorov-Gleichungen:

Für einen Markovschen Übergangskern  $Q$  auf dem Raum  $(X, \mathcal{X})$  gilt  $Q^{n+m} = Q^n Q^m$  für alle  $n, m \geq 0$ .

b) Im Beweis von Proposition 1.4 der Vorlesung wurde gezeigt, dass die Aussage für alle Funktionen der Form  $f(x_0, \dots, x_k) = f_0(x_0) \cdots f_k(x_k)$  gilt. Folgern Sie mithilfe des Satzes über monotone Klassen, dass die Aussage dieser Proposition für alle  $\mathcal{X}^{\otimes(k+1)}$ -messbaren Funktionen  $f : X^{(k+1)} \rightarrow \mathbb{R}$  gilt.

c) Zeigen Sie, dass die Funktion  $T : (X \times Y) \times (\mathcal{X} \otimes \mathcal{Y}) \rightarrow [0, 1]$  in Definition 1.5 der Vorlesung einen Übergangskern auf dem Produktraum  $(X \times Y, \mathcal{X} \otimes \mathcal{Y})$  definiert.

### Aufgabe 2

(2 Punkte)

Sei  $(\xi_n)_{n \in \mathbb{N}}$  eine Folge unabhängig identisch verteilter reellwertiger Zufallsvariablen und  $(X_n)_{n \in \mathbb{N}_0}$  eine Folge von Zufallsvariablen auf einem messbaren Raum  $(E, \mathcal{E})$ , die rekursiv definiert wird durch

$$X_0 = z, \quad X_{n+1} = f(X_n, \xi_{n+1}),$$

wobei  $f : E \times \mathbb{R} \rightarrow E$  eine messbare Funktion und  $z \in E$  seien. Zeigen Sie, dass  $(X_n)_{n \in \mathbb{N}_0}$  eine Markovkette auf  $(E, \mathcal{E})$  mit dem Übergangskern

$$P(x, A) = \mathbb{E}_{\xi_1} [\mathbb{1}_A(f(x, \xi_1))]$$

ist.

### Aufgabe 3

(4 Punkte)

Es sei  $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$  eine Folge unabhängiger identisch verteilter Zufallsvariablen mit

$$\mathbb{P}(X_1 = 1) = p, \text{ und } \mathbb{P}(X_1 = -1) = q = 1 - p, \quad p \in (0, 1).$$

Seien ferner  $S_n = \sum_{i=1}^n X_i$  und  $M_n = \max\{S_k | 1 \leq k \leq n\}$ .

a) Zeigen Sie, dass  $(Y_n)_{n \in \mathbb{N}}$  mit  $Y_n = M_n - S_n$  eine Markovkette ist und bestimmen Sie den Übergangskern.

b) Zeigen Sie, dass  $(M_n)_{n \in \mathbb{N}} = (Y_n + S_n)_{n \in \mathbb{N}}$  keine Markovkette ist.

BEMERKUNG: Nach Aufgabe 2 ist  $(S_n)_{n \in \mathbb{N}}$  eine Markovkette, die Summe zweier Markovketten muss also keine Markovkette sein.

**Aufgabe 4**

(4 Punkte)

Es bezeichne  $W_n$  das Wetter am Tag  $n$  mit Zuständen  $R$  für Regen oder  $S$  für Sonne. Angenommen die Wahrscheinlichkeit, dass es heute regnet, falls es die letzten beiden Tage nicht geregnet hat, beträgt 0.3, jedoch 0.6 falls es an mindestens einem Tag der letzten beiden Tage geregnet hat.  $(W_n)_{n \in \mathbb{N}}$  ist *keine* Markovkette, aber das Wetter für die letzten beiden Tage  $X_n = (W_{n-1}, W_n)$  bildet eine Markovkette mit Zuständen  $E = \{RR, SS, SR, RS\}$ .

- a) Begründen Sie kurz, dass  $(W_n)_{n \in \mathbb{N}}$  keine Markovkette ist.

BEMERKUNG: Für eine zweidimensionale Markovkette sind also die einzelnen Komponenten nicht zwangsläufig Markovketten.

- b) Berechnen Sie die Übergangswahrscheinlichkeiten für  $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$ , d.h.  $\mathbb{P}(X_{n+1} = x | X_n = y)$  für alle Zustände  $x, y \in E$  und beliebiges  $n \in \mathbb{N}$ .
- c) Berechnen Sie die Zwei-Schrittübergangswahrscheinlichkeiten für  $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$ , d.h.  $\mathbb{P}(X_{n+2} = x | X_n = y)$  für alle Zustände  $x, y \in E$  und beliebiges  $n \in \mathbb{N}$ .
- d) Bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeit, dass es am Mittwoch regnet unter der Bedingung, dass es am Sonntag und Montag davor nicht regnete.