Übungen zur Vorlesung „Hidden Markov Models"

Blatt 7

Abgabetermin: Dienstag, 05.12.2023, bis 14:15 Uhr in der Vorlesung.
(Bitte nur maximal zu zweit abgeben.)

Aufgabe 1 (6 Punkte)

Es gelten folgende Bedingungen:

(i) Es existieren $\varepsilon > 0$, $m \in \mathbb{N}$, und ein Wahrscheinlichkeitsmaß κ auf $(X, \mathcal{X})$, so dass

$$\varepsilon\kappa(A) \leq Q^m(x, A) \leq \frac{1}{\varepsilon}\kappa(A) \quad \text{für alle } A \in \mathcal{X} \text{ und alle } x \in X.$$

(ii) Es existieren zwei messbare Funktionen γ^- und γ^+ von Y nach $(0, \infty)$, sodass für jedes $y \in Y$ gilt:

$$\gamma^-(y) \leq \inf_{x \in X} \gamma(x, y) \leq \sup_{x \in X} \gamma(x, y) \leq \gamma^+(y).$$

Zeigen Sie, folgende Aussagen:

a) Für alle $k, N \in \mathbb{N}$ mit $0 \leq k < n$ und $x \in X$ gilt:

$$\prod_{j=k+1}^{N} \gamma^-(y_j) \leq \beta_{k|N}[y_{k+1:N}](x) \leq \prod_{j=k+1}^{N} \gamma^+(y_j),$$

wobei $\beta_{k|n}$ durch die Rückwärtsrekursion gegeben ist. Vergleichen Sie dazu im Vorlesungsskript die Gleichungen (2.4) und (2.6).

b) Für alle $u, N \in \mathbb{N}$ mit $0 \leq u < \lfloor N/m \rfloor$ und Wahrscheinlichkeitsmaße ν und ν' auf $(X, \mathcal{X})$ gilt:

$$\varepsilon^2 \prod_{i=um+1}^{(u+1)m} \frac{\gamma^-(y_i)}{\gamma^+(y_i)} \leq \frac{\int \beta_{um:N}[y_{um+1:N}](x)\nu(dx)}{\int \beta_{um:N}[y_{um+1:N}](x)\nu'(dx)} \leq \varepsilon^{-2} \prod_{i=um+1}^{(u+1)m} \frac{\gamma^+(y_i)}{\gamma^-(y_i)}$$

c) Für alle $u, N \in \mathbb{N}$ mit $0 \leq u < \lfloor N/m \rfloor$ existiert ein Übergangskern $\lambda_{u,N}$ von $(Y^{(N-(u+1)m)}, \mathcal{Y}^{(N-(u+1)m)})$ nach $(X, \mathcal{X})$, so dass für alle $x \in X$, $A \in \mathcal{X}$ und $y_{um+1:N} \in Y^{(N-um)}$ gilt:

$$\begin{aligned}
&\varepsilon^2 \prod_{i=um+1}^{(u+1)m} \frac{\gamma^-(y_i)}{\gamma^+(y_i)} \lambda_{u,N}(y_{(u+1)m+1:N}, A) \\
&\leq \Big(\prod_{i=um}^{(u+1)m-1} \widetilde{Q}_i[y_{i+1:N}] \Big)(x, A) \\
&\leq \frac{1}{\varepsilon^2} \prod_{i=um+1}^{(u+1)m} \frac{\gamma^+(y_i)}{\gamma^-(y_i)} \lambda_{u,N}(y_{(u+1)m+1:N}, A).
\end{aligned}$$

d) Für alle nicht-negativen ganzen Zahlen $u, N \in \mathbb{N}$ gilt:

$$\delta\Big(\prod_{i=um}^{(u+1)m} \widetilde{Q}[y_{i+1:N}]\Big) \leq \begin{cases} \varrho_0(y_{um+1:(u+1)m}) & \text{für } u < \lfloor N/m \rfloor, \\ \varrho_1 & \text{für } u \geq \lfloor N/m \rfloor, \end{cases}$$

wobei für alle $y_{um+1:(u+1)m} \in Y^m$:

$$\varrho_0(y_{um+1:(u+1)m}) := 1 - \varepsilon^2 \prod_{i=um+1}^{(u+1)m} \frac{\gamma^-(y_i)}{\gamma^+(y_i)} \quad \text{und} \quad \varrho_1 := 1 - \varepsilon.$$

e) Basierend auf den oben genannten Ergebnissen, finden Sie eine geeignete Abschätzung für $\|\pi_{\nu,k|N} - \pi_{\nu',k|N}\|_{TV}$, wobei $k = jm + r$ mit $0 \leq r < m$.

Aufgabe 2 (2 Punkte)

Erfüllt Beispiel 2.19 im Skript die Annahmen (i) und (ii) aus Aufgabe 1?

Aufgabe 3 (4 Punkte)

Seien ν und ν' Wahrscheinlichkeitsmaße auf $(X, \mathcal{X})$ und für $n \in \mathbb{N}$, $y_{0:n} \in \mathcal{Y}^{n+1}$, sodass

$$c_\nu(y_0) := \int_X \gamma(x, y_0)\nu(dx) > 0 \quad \text{und} \quad c_{\nu'}(y_0) := \int_X \gamma(x, y_0)\nu'(dx) > 0.$$

(i) Zeigen Sie, dass unter Annahme 2.20 folgende Abschätzung gilt:

$$\|\pi_{\nu,0|n} - \pi_{\nu',0|n}\|_{TV} \leq 2\frac{\zeta^+(y_1)}{\zeta^-(y_1)} \frac{\|\gamma\|_\infty}{c_\nu(y_0) \vee c_{\nu'}(y_0)} \|\nu - \nu'\|_{TV}.$$

(ii) Zeigen Sie, dass unter Annahme 2.22 folgende Abschätzung gilt:

$$\|\pi_{\nu,0|n} - \pi_{\nu',0|n}\|_{TV} \leq \frac{2}{\varepsilon^2} \frac{\|\gamma\|_\infty}{c_\nu(y_0) \vee c_{\nu'}(y_0)} \|\nu - \nu'\|_{TV}.$$

Hinweis: Berechnen Sie die Totalvariation mithilfe von Aufgabe 4 (ii), Blatt 4.