No arbitrage - eine kurze Einführung

Thorsten Schmidt

Department for Mathematical Stochastics, University Freiburg
www.stochastik.uni-freiburg.de
thorsten.schmidt@stochastik.uni-freiburg.de

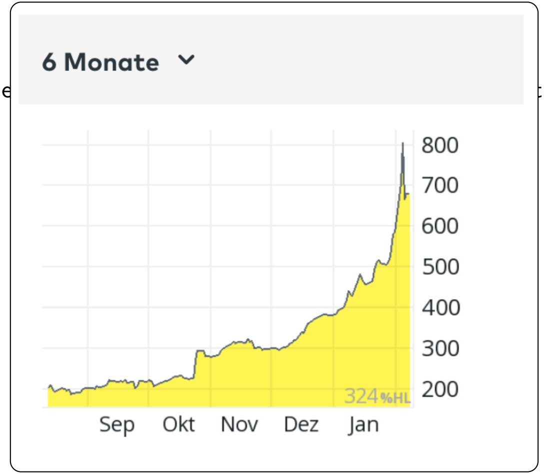
Freiburg, 10.02.2020

Motivation

- Haben Sie sich einmal den Kurs der TESLA-Aktie angeschaut ?

Motivation

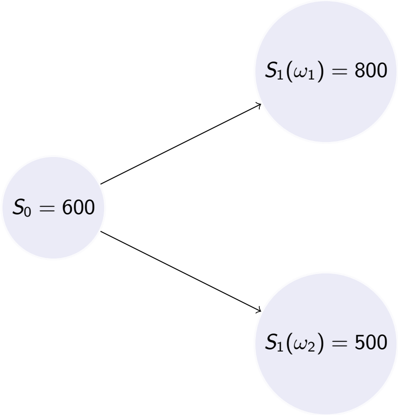
- Haben Sie … t ?



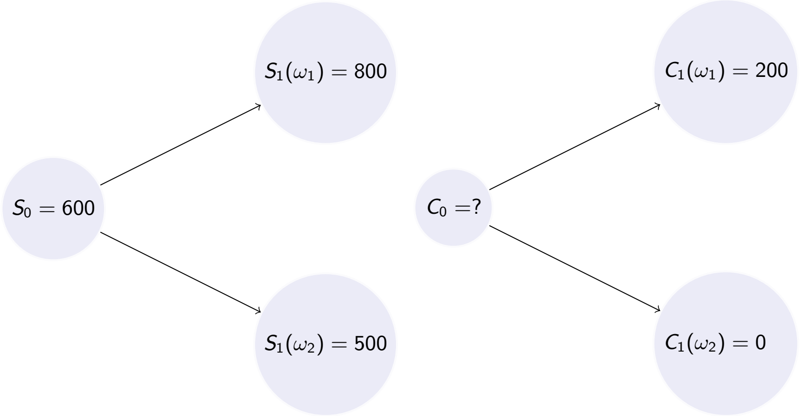
Motivation

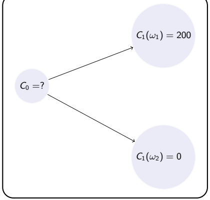
- Haben Sie sich einmal den Kurs der TESLA-Aktie angeschaut ?
- Heutiger Kurs: 680
- Sie denken: entweder geht der Kurs noch einmal richtig durch die Decke, oder er bricht ein.
- Ihre Investitionsstrategie: Sie sichern sich den heutigen Kurs mit einem Call, und bei fallenden Kursen kaufen Sie günstig nach.

- Hierfür stellen Sie ein einfaches Modell mit zwei Möglichkeiten (hoch, runter auf: Ein *Binomialmodell*.

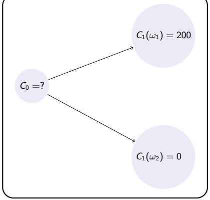


- Hierfür stellen Sie ein einfaches Modell mit zwei Möglichkeiten (hoch, runter auf: Ein *Binomialmodell*.
- Die Wahrscheinlchkeit $P(\omega_1) = 1/4$ schätzen Sie.
- Dazu betrachten Sie noch einen Call, mit Strike $K = S_0 = 600$.





- Was ist ihr Preis für C_0???



- Was ist ihr Preis für C_0???
- Sie wählen den Erwartungswert:

$$C_0 = E[C_1] = \frac{1}{4}200 + \frac{3}{4}0 = 50.$$

- Wieso nutzen Sie den Erwartungswert ? Was spricht dafür / dagegen ?

Arbitrage

- Wenn Sie den Call für 50 verkaufen, müssen Sie an 1 möglicherweise 200 zahlen, das kommt allerdings nur mit einer Wahrscheinlichkeit von 0.25 vor. Wiederholen Sie dieses Spiel genügend oft unabhängig hintereinander, so wird sich der Gewinn im Mittel be 0 einpendeln. (Sie bekommen natürlich pro Transaktion eine Gebühr, ihr Gewinn).
- Ein anderer Marktteilnehmer kann aber nun sehr leicht sehr viel Geld machen!!
- Wie ? Sie geht wie folgt vor:
  1. Sie kauft Ihren Call und verkauft $2/3$ Aktien (erhält 400) und legt 350 aufs Bankkonto.

Arbitrage

- Wenn Sie den Call für 50 verkaufen, müssen Sie an 1 möglicherweise 200 zahlen, das kommt allerdings nur mit einer Wahrscheinlichkeit von 0.25 vor. Wiederholen Sie dieses Spiel genügend oft unabhängig hintereinander, so wird sich der Gewinn im Mittel be 0 einpendeln. (Sie bekommen natürlich pro Transaktion eine Gebühr, ihr Gewinn).
- Ein anderer Marktteilnehmer kann aber nun sehr leicht sehr viel Geld machen!!
- Wie ? Sie geht wie folgt vor:
  1. Sie kauft Ihren Call und verkauft $2/3$ Aktien (erhält 400) und legt 350 aufs Bankkonto.
  2. Fällt $\omega = \omega_1$, so hat ihr Portfolio folgenden Wert:
  $$200 - 2/3 \cdot 800 + 350 \approx 200 - 540 + 350 = 10$$
  3. Fällt $\omega = \omega_2$,
  $$200 - 2/3 \cdot 500 + 350 \approx \quad 0 - 333 + 350 = 17.$$
  4. Sie macht also in allen Fällen ein Gewinn (das ist eine Arbitrage).

- Wir diskutieren *kurz* das Set-Up in einer Periode. Die Thematik in allgemeinerer Form, mit Zinsmärkten und Transaktionskosten, sowie optimalen Strategien sind Gegenstand der Vorlesung im Sommersemester.
- Eine hervorragende Referenz ist **?**, sehr zu empfehlen!
- Wir betrachten einen W-Raum $(\Omega, \mathscr{F}, P)$ mit einer Filtration $\mathbb{F} = (\mathscr{F}_t)_{t=0,\dots,T}$ und einem finalen Zeithorizont $T > 0$.
- Es gibt ein Bankkonto oder, allgemeiner ein Numéraire. Ein Numéraire S^0 ist ein Wertpapier, was strikt positiv ist, $P(S_t^0 > 0) = 1$ für $t = 0, \dots, T$. Ein typisches Beispiel ist ein Bankkonto mit Zins r. In diesem Fall ist $S_t^0 = \exp(rt)$.

Wertpapiere

- Darüber hinaus werden d Wertpapiere gehandelt. Ihre Preiseprozesse seien mit $S^1, \ldots, S^d$ bezeichnet. Sie dürfen auch Null werden, aber wir schränken uns auf solche Wertpapiere mit $S^k \geq 0$ ein (wie z.B. Aktien oder Anleihen).
- Die Preisprozesse S^k, $k = 0, \ldots, d$ sind adaptiert, d.h. S_t ist $\mathscr{F}_t$-messbar (zu jeder Zeit kennen wir den aktuellen Preis von S^k).

Handelsstrategien

- Wenn Sie handeln, kaufen oder verkaufen Sie Aktien, oder leihen sich welche (Short-Selling). Wir nehmen an, dass jeder beliebie Bruchteil von Aktien gekauft werden kann, sowie dass es keine Transaktion skosten oder sonstige Handelsbeschränkungen gibt.
- Eine Handelsstrategie H wird beschrieben durch *Anzahl der Aktien, die sie zu jedem Zeitpunkt besitzen*. Wir nehmen an, dass Sie zu Beginn des Intervals $(t-1, t]$ kaufen und das ganze Interval bis zum Ende halten. Besitzen Sie in dieser Periode H_t^k Teile des k-ten Wertpapiers, so besitzen Sie an $t \geq 1$ das Vermögen

$$H_t \cdot S_t := \sum_{k=0}^{d} H_t^k S_t^k, \qquad t = 1, \ldots, T.$$

- An t wird umgeschichtet. Eine Handelsstrategie heißt *selbstfinanzierend*, falls

$$H_t \cdot S_t = H_{t+1} S_t, \qquad t = 1, \ldots, T-1.$$

- Außerdem nehmen wir sinnvollerweise an, dass H *vorhersehbar* ist (d.h. H_t ist $\mathscr{F}_{t-1}$-messbar, also bereits an $t-1$ bekannt.)

Diskontierte Größen

- Wir führen die *diskontierten Größen* ein und setzen
$$X_t^k := \frac{S_t^k}{S_0^k}, \qquad t = 0, \dots, T, \;\; k = 1, \dots, d.$$
- Der *diskontierte Wertprozess* ist gegeben durch
$$V_0 := H_1 \cdot X_0, \qquad V_t := H_t \cdot X_t, \qquad t = 1, \dots, T.$$
- Die wichtigste Größe ist der *diskontierte Gewinnprozess* (Verluste sind natürlich auch möglich), gegeben durch
$$G_t := \sum_{s=1}^{T} H_s \cdot \Delta X_s = \sum_{s=1}^{T} H_s \cdot (X_s - X_{s-1}), \qquad t = 1, \dots, T$$
mit der natürlichen Normierung $G_0 = 0$.

Arbitrage

- Nun können wir bereits eine Arbitrage definieren: Eine *Arbitrage* ist eine *selbstfinanzierende Handelsstrategie* H, so dass für $V = V^H$ gilt, dass

$$V_0 \leq 0, \;\; V_T \geq 0 \;\; P\text{-f.s., und} \qquad P(V_T > 0) > 0.$$

- Wie kann man ein Modell finden was keine Arbitrage zulässt?

Arbitrage

- Nun können wir bereits eine Arbitrage definieren: Eine *Arbitrage* ist eine *selbstfinanzierende Handelsstrategie* H, so dass für $V = V^H$ gilt, dass

$$V_0 \leq 0, \ \ V_T \geq 0 \ P\text{-f.s., und} \qquad P(V_T > 0) > 0.$$

- Wie kann man ein Modell finden was keine Arbitrage zulässt?
- Wichtigstes Hilfsmittel sind hierfür *äuqivalente Martingalemaße*.

EMM

- Das Maß Q heißt *äquivalent* zu P, $P \sim Q$, falls P und Q die gleichen Nullmengen haben, also wenn für jedes $N \in \mathscr{F}$ gilt, dass

$$P(N) = 0, \qquad \Leftrightarrow \qquad Q(N) = 0.$$

- Ein Maß Q heißt Martingalmaß, falls die diskontierten Preise der Wertpapiere Q-Martingale sind, d.h.

$$E_Q[X_{t+t} | \mathscr{F}_t] = X_t, \qquad t = 0, \ldots, T-1.$$

Der Fundamentalsatz der Wertpapierbewertung

Theorem

Der Markt ist genau dann frei von Arbitrage wenn ein äquivalentes Martingalmaß existiert.

Der Beweis erfolgt in mehreren Schritten:

- Zuerst zeigt man, dass die Aussage äquivalent dazu ist, dass jeder Ein-Periodenmarket frei von Arbitrage ist.
- In einem Ein-Periodenmarket kann man leicht zeigen, dass gleichzeitige Existenz eines äquivalenten Martingalmaßes und einer Arbitrage zu einem Widerspruch führt.
- Die Rückrichtung ist die schwierige Richtung. Hier muss ein Martingalmaß konstruiert werden. Hierfür nutzt man typischerweise den Satz von Hahn-Banach.

- Wir zeigen den zweiten Schritt: Sei $T = 1$, H eine Arbitrage und Q ein äquivalentes Martingalmaß.
- Da $Q \sim P$, gilt $Q(V_0 \leq 0, V_T \geq 0) = 1$ und $Q(V_T > 0) > 0$.
- Wir berechnen

$$\begin{aligned} E_Q[\frac{V_1}{S_1^0}|\mathscr{F}_0] &= H_1 \cdot E_Q[\frac{S_T}{S_1^0}|\mathscr{F}_0] \\ &= H_1 \cdot \frac{S_0}{S_0^0} = \frac{V_0}{S^0} \leq 0. \end{aligned}$$

  Allerdings ist $V_1(S_1^0)^{-1} \geq 0$, und nicht gleich null. Wir erhalten

$$E_Q[\frac{V_1}{S_1^0}|\mathscr{F}_0] \geq 0,$$

  und nicht gleich null, ein Widerspruch.

Risk-Neutral Pricing

- Der Fundamentalsatz eröffnet folgende Tür zur Arbitrage-freien Bewertung: Betrachtet werde ein *Europäischer Anspruch*, das ist schlicht eine beliebige Auszahlung an T, welche wir durch eine $\mathscr{F}_T$-messbare Zufallsvariable Y_T beschreiben.
- Einen Arbitrage-freien Preise für Y_T erhählt man durch die *risikoneutrale Bewertungsformel*

$$E_Q\left[\frac{S_t^0}{S_T^0} Y_T \middle| \mathscr{F}_t\right],$$

  solange der Erwartungswert existiert.
- Fügt man den europäischen Anspruch mit diesem Preisprozess zu dem Markt hinzu, so bleibt Q natürlich ein Martingalmaß. Nach dem Fundamentalsatz ist der Markt dann arbitragefrei!

Das Black-Scholes Modell

- Das Black-Scholes Modell hatten wir bereits kennengelernt. Seien dazu $\xi_1, \dots$ i.i.d. $\mathcal{N}(0,1)$. Wir fixieren den Drift $\mu \in \mathbb{R}$ und die Volatilität $\sigma > 0$.
- Mit Anfangskurs $S_0 \in \mathbb{R}$ ist der Preisprozess gegeben durch eine geometrische Brownsche Bewegung

$$S_t = S_0 \exp\Big(\big(\mu - \frac{\sigma^2}{2}\big)t + \sigma W_t\Big),$$

$W_t = \sum_{s=1}^t \xi_s, \;\; t = 1, \dots, T$ und $W_0 = 0$.
- Als Numéraire wählen wir das Bankkonto $S_t^0 = \exp(rt)$.

Existenz eines Martingalmaßes

Satz

Das Black-Scholes Modell ist frei von Arbitrage

- Wir konstuieren ein äquivalentes Martingalmaß. Damit S ein Martingal ist, muss die Gleichung

$$S_t = E_Q[e^{-rt} S_{t+1} | \mathscr{F}_t] = S_t E_Q[\exp\left(\left(\mu - \frac{\sigma^2}{2} - r\right) + \sigma \xi_t\right)]$$

erfüllt sein. Wir wählen ein Maß Q, so dass $\xi_t \sim \mathscr{N}(\mu', 1)$ unter Q. Dann ist

$$E_Q[e^{\sigma \xi_t}] = \exp(\sigma \mu' + \frac{\sigma^2}{2}).$$

Es genügt also, $\mu' = {}^{r-\mu}/_{\sigma}$ zu wählen.

- Nach dem Satz von Radon-Nikodym ist ein solches Maß Q über seine Dichte

$$dQ = L_T dP$$

bestimmt. Wir wählen die Dichte so, dass die ξ_i weiterhin i.i.d. und normalverteilt, aber mit neuem Mittelwert unter Q sind. Demnach ist

$$L_T = \prod_{i=1}^{n} f(x_i)$$

mit

$$f(x) = \exp(\theta x + c) \tag{1}$$

und noch zu bestimmenden θ, c. In der Tat,

$$\begin{aligned} Q(\xi_1 \leq z) &= -\int_0^z e^{\theta x} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}} dx \\ &= -\int_0^z \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{x^2 - 2\theta x + \theta^2}{2} + \frac{\theta^2}{2}\right) dx, \end{aligned}$$

und wir erhalten als Dichte

$$f(x) = \exp\left(\theta x - \frac{\theta^2}{2}\right),$$

mit $\theta = \mu' = {}^{r-\mu}/_{\sigma}$.

Die Black-Scholes Formel

Satz

Der Preis eines Europäischen Calls mit Strike K und Maturität T ist im Black-Scholes Modell

$$
\begin{aligned}
C_T &= S_0\Phi(d_1) - Ke^{-rT}\Phi(d_2) \\
d_1 &= \frac{\log(S_T/Ke^{-rT}) + \sigma^2 T}{\sigma T} \\
d_2 &= d_1 - \sigma T.
\end{aligned} \tag{2}
$$

- Nach der risikoneutralen Bewertungsformel ist folgender Erwartungswert auszurechnen:

$$E_Q[e^{-rT}(S_T - K)^+] = E_Q[e^{-rT}S_T\mathbb{1}_{\{S_T \geq K\}}] - Ke^{-rT}Q(S_T \geq K).$$

- Wir betrachten den zweiten Teil:

$$Q(S_T \geq K) = Q\big(S_0 \exp((r - \sigma^2/2)T + \sigma W'_T) \geq K\big), \qquad (3)$$

wobei $W'_T \sim \mathcal{N}(0, T)$ eine Brownsche Bewegung unter Q darstellt. Wir setzen $W_T = \sqrt{T}\eta$ mit $\eta \sim \mathcal{N}(0,1)$. Dann ist

$$(4) = Q\big(\eta \geq \frac{\log(K/S_0) - (r - \sigma^2/2)T}{\sigma\sqrt{T}}\big) = 1 - \Phi(-d_2) = \Phi(d_2).$$

- Nun kommen wir zu dem ersten Teil, $E_Q[S_T \mathbb{1}_{\{S_T \geq K\}}]$. Wieder nutzen wir

$$S_T = S_0 \exp((r - \sigma^2/2)T + \sigma\sqrt{T}\eta), \tag{4}$$

und beobachten, dass für $\xi \sim \mathcal{N}(0,1)$

$$\begin{aligned} E[e^{a\xi} \mathbb{1}_{\{\xi \geq z\}}] &= \int_z^\infty e^{ax} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}} dx \\ &= \int_z^\infty \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2 - 2ax + a^2}{2} + \frac{a^2}{2}} dx \\ &= e^{\frac{a^2}{2}} P(a + \xi \geq z). \end{aligned} \tag{5}$$

Damit ist mit $a = \sigma\sqrt{T}$ und $z = {}^{\log(K/S_0)-(r-\sigma^2/2)T}\!/_{\sigma\sqrt{T}}$

$$\begin{aligned}
E_Q[e^{-rT} S_T \mathbb{1}_{\{S_T \geq K\}}] &= S_0 e^{-rT} e^{(r-\sigma^2/2)T} E\left[e^{\sigma W'_T} \mathbb{1}_{\{S_0 \exp((r-\sigma^2/2)T+\sigma W'_T) \geq K\}}\right] \\
&= S_0 e^{-rT} e^{(r-\sigma^2/2)T} E_Q\left[e^{a\eta} \mathbb{1}_{\{\eta \geq \frac{\log(K/S_0)-(r-\sigma^2/2)T}{\sigma\sqrt{T}}\}}\right] \\
&= S_0 e^{-rT} e^{(r-\sigma^2/2)T} e^{\frac{a^2}{2}} Q(a+\eta \geq z) \\
&= S_0 \Phi(d_2 + \sigma\sqrt{T}) = S_0 \Phi(d_1).
\end{aligned}$$