Übungen zur Vorlesung "Analysis III"

Blatt 2

Abgabetermin: Montag, 04.11.2019, bis 10.00 Uhr in den Briefkästen im Math. Institut
(Geben Sie auf jedem Lösungsblatt Ihren Namen und Ihre Übungsgruppe an.
Sie dürfen maximal zu zweit abgeben.)

Aufgabe 1 (4 Punkte)

Finden Sie eine Lösung $x : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ der Differentialgleichung

$$x'(t) = bx(t) \cdot (K - x(t))$$

mit $b, K > 0$ und $x(0) = x_0 \in \mathbb{R}$ mithilfe des Verfahrens der Trennung der Variablen.

Aufgabe 2 (4 Punkte)

Es sei $\Omega = \{1, \dots, 5\}$. Bestimmen Sie die von

(a) $\mathcal{E} := \{\{1, 2, 3, 4\}\}$,

(b) $\mathcal{F} := \{\{1, 2, 3\}, \{4\}\}$,

(c) $\mathcal{G} := \{1, 2, 3, 4\}$,

(d) $\mathcal{H} := \emptyset$

erzeugte σ-Algebra.

Aufgabe 3 (4 Punkte)

Sei $f : X \to Y$ eine Abbildung und seien $\mathcal{A} \subset \mathcal{P}(X)$, $\mathcal{B} \subset \mathcal{P}(Y)$. Entscheiden Sie (mit Begründung), ob die folgenden Aussagen richtig sind:

(a) Ist $\mathcal{A}$ eine σ-Algebra, so ist auch $\{B \subset Y \mid f^{-1}(B) \in \mathcal{A}\}$ eine σ-Algebra.

(b) Ist $\mathcal{B}$ eine σ-Algebra, so ist auch $f^{-1}(\mathcal{B}) := \{f^{-1}(B) \mid B \in \mathcal{B}\}$ eine σ-Algebra.

Aufgabe 4 (4 Punkte)

Es sei $\mathcal{A}$ eine σ-Algebra auf einer Menge Ω.

(a) Wir setzen für $\omega \in \Omega$

$$M_\omega := \bigcap_{A \in \mathcal{A} : \omega \in A} A.$$

Zeigen Sie, dass $\mathcal{M} := \{M_\omega \mid \omega \in \Omega\}$ eine disjunkte Zerlegung von Ω ist.

(b) Zeigen Sie, dass die σ-Algebra $\mathcal{A}$ entweder endlich oder überabzählbar ist.
Hinweis: Argumentieren Sie durch Widerspruch und nutzen Sie Aufgabenteil (a).

(c) Falls $\mathcal{A}$ endlich ist, was folgt dann für die Anzahl der Elemente von $\mathcal{A}$?