Übungen zur Vorlesung "Analysis III"

Blatt 13

Abgabetermin: Montag, 03.02.2020, bis 10.00 Uhr in den Briefkästen im Math. Institut
(Geben Sie auf jedem Lösungsblatt Ihren Namen und Ihre Übungsgruppe an.
Sie dürfen maximal zu zweit abgeben.)

Aufgabe 1 (4 Punkte)

Es sei

$$M := \{(x,y,z)^\top \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 - 2z^2 = 0, x + y + z - 1 = 0\}.$$

(a) Zeigen Sie, dass M eine eindimensionale Untermannigfaltigkeit des $\mathbb{R}^3$ ist.

(b) Bestimmen Sie den Tangentialraum $T_{(1,1,-1)^\top}M$.

Aufgabe 2 (4 Punkte)

Es seien $0 < r < R$ und der zweidimensionale Torus sei definiert durch

$$\mathbb{T}^2 := \left\{ (x,y,z)^\top \in \mathbb{R}^3 \;\middle|\; \left(\sqrt{x^2+y^2} - R\right)^2 + z^2 = r^2 \right\}.$$

(a) Zeigen Sie, dass es sich bei $\mathbb{T}^2$ um eine Untermannigfaltigkeit des $\mathbb{R}^3$ handelt und bestimmen Sie deren Dimension.

(b) Bestimmen Sie den Tangentialraum $T_{(x,y,z)^\top}\mathbb{T}^2$ durch Angabe einer Basis.
Hinweis: Unterscheiden Sie die drei Fälle $y \neq 0$, $y = 0$ und $z \neq 0$ sowie $y = z = 0$.

Aufgabe 3 (4 Punkte)

Es sei $U \subset \mathbb{R}^m$ offen und $f : U \longrightarrow \mathbb{R}^l$ eine stetig differenzierbare Abbildung. Weiter sei

$$E = \operatorname{graph}(f) = \{z \in \mathbb{R}^{m+l} \mid z = (x, f(x)) \text{ für } x \in U\}$$

die Untermannigfaltigkeit aus Aufgabe 4 von Blatt 11. Zeigen Sie, dass für $p = (x, f(x)) \in E$ und die Matrix

$$A = \begin{pmatrix} E_m \\ f'(x) \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{(m+l)\times m}$$

der Tangential- und Normalenraum gegeben sind durch

$$T_pE = \operatorname{Im}(A) \quad \text{und} \quad N_pE = \ker(A^\top).$$

Aufgabe 4 (4 Punkte)

Es sei $G \subset \mathbb{R}^3$ eine Gerade, welche mit der Spurtopologie versehen sei. Wir definieren ein Maß λ^G auf $(G, \mathcal{B}(G))$ so, dass jedem Streckenstück auf G seine euklidische Länge zugeordnet sei. Es sei ferner $\gamma : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^3$ eine affin lineare Abbildung, genauer $\gamma(x) = b + Ax$ mit $b \in \mathbb{R}^3$ und $A \in \mathbb{R}^{1\times 3}$, sowie $M := \gamma((0,1))$ und $f : M \to \mathbb{R}$ eine λ^G-messbare Abbildung.

(a) Zeigen Sie, dass $\lambda^G \neq \lambda^3|_M$.

(b) Zeigen Sie, dass

$$\int_M f(x) d\lambda^G(x) = \int_{(0,1)} f(\gamma(x)) \sqrt{\det(A^\top A)} d\lambda(x).$$