3. Übungsblatt zur Vorlesung Empirische Prozesse

Prof. Dr. Angelika Rohde, WiSe 2016 / 2017

Aufgabe 1. (4 Punkte)

Seien $\mathcal{X} = \mathbb{N}$ und $\mathcal{D}$ die Menge aller Teilmengen von $\mathbb{N}$, $\mathbb{P}$ ein W-Maß auf $(\mathcal{X}, \mathcal{P}(\mathcal{X}))$. Beweisen Sie mithilfe von Satz 5.2 (Vapnik-Červonenkis, Steele) aus der Vorlesung die uniforme Konsistenz von $\widehat{\mathbb{P}}_n$ auf $\mathcal{D}$.

Hinweis: Zeigen Sie, dass $\mathbb{E}(\widehat{V}_n/n) \leq \sum_{k\in\mathbb{N}} \min(\mathbb{P}(\{k\}), 1/n)$.

Aufgabe 2. (4 Punkte)

Sei $\mathcal{D}$ die Menge aller abgeschlossenen Halbräume im $\mathbb{R}^2$, d.h. aller Mengen der Form

$$\left\{x \in \mathbb{R}^2 : u^t x \leq r\right\}$$

mit einem Vektor $u \in \mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$ und einer reellen Zahl r. Zeigen Sie, dass $\mathcal{D}$ eine (universelle) Glivenko-Cantelli-Klasse ist.

Hinweis: Beweisen Sie $\widehat{\Delta}_n \leq 2n(n-1)$ für $n \geq 2$.

Aufgabe 3. (4 Punkte)

Für eine beliebige endliche Teilmenge E von $\mathcal{X}$ und eine Familie $\mathcal{G}$ von Teilmengen von $\mathcal{X}$ ist

$$\Delta(E, \mathcal{G}) := \sharp(\mathcal{G} \cap E).$$

Seien $\mathcal{C}$ und $\mathcal{D}$ Familien von Teilmengen von $\mathcal{X}$. Beweisen Sie die folgenden Aussagen:

(i) $\Delta(E, \{\mathcal{X} \setminus D : D \in \mathcal{D}\}) = \Delta(E, \mathcal{D})$,

(ii) $\Delta(E, \{C * D : C \in \mathcal{C}, D \in \mathcal{D}\}) \leq \Delta(E, \mathcal{C})\Delta(E, \mathcal{D})$

für beliebige endliche Teilmengen E von $\mathcal{X}$. Dabei bezeichne $*$ eine der Boolschen Operationen $\cap$, $\cup$ oder $\setminus$.