Abteilung für Mathematische Stochastik — Sommersemester 2025
Dr. Johannes Brutsche — M. Sc. Dario Kieffer

# Übungen zu der Vorlesung „Stochastik II“

## Blatt 03

**Abgabe:** Freitag, 30.05.2025, 10:15 Uhr.
(Schreiben Sie Ihren Namen auf jedes Aufgabenblatt. Sie dürfen die Übungsblätter in Zweiergruppen bearbeiten.)

**Aufgabe 1** (Momentenschätzer) (1+2+1 Punkte)
Es sei $\mathcal{E} = (\mathbb{R}^n, \mathcal{B}(\mathbb{R}^n), \{\mathbb{P}_\vartheta^{\otimes n} : \vartheta \in (0,\infty)\})$ das statistische Modell aus Aufgabe 2, Blatt 02, wobei $\mathbb{P}_\vartheta = \mathcal{U}[0,\vartheta]$ die Gleichverteilung auf $[0,\vartheta]$ bezeichne. Weiter sei eine zufällige Stichprobe $(X_1, \ldots, X_n)$ gegeben.

(a) Bestimmen Sie, unter Verwendung des ersten Moments $\mathbb{E}_\vartheta[X_1]$, einen Momentenschätzer $\hat{\vartheta}_n$ für $\vartheta$.

(b) Zeigen Sie, dass der Schätzer $\hat{\vartheta}_n$ erwartungstreu ist und berechnen Sie $\mathrm{Var}_\vartheta(\hat{\vartheta}_n)$.

(c) Folgern Sie, dass die Schätzfolge $(\hat{\vartheta}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ konsistent ist und dass $\sqrt{n}(\hat{\vartheta}_n - \vartheta)$ in Verteilung gegen eine Normalverteilung konvergiert. Geben Sie den Erwartungswert und die Varianz der Normalverteilung an.

**Aufgabe 2** (Maximum-Likelihood-Schätzer I) (4 Punkte)
Seien $X_1, \ldots, X_n$ uanbhängige, invers normalverteilte Zufallsvariablen, d. h. die Verteilungen $\mathbb{P}_{X_i}$ besitzen die Dichte

$$f_{(\mu,\lambda)}(x) = \mathbb{1}_{\{x\in(0,\infty)\}}\sqrt{\frac{\lambda}{2\pi x^3}}e^{-\frac{\lambda(x-\mu)^2}{2\mu^2 x}},$$

wobei $\lambda, \mu > 0$. Bestimmen Sie die Maximum-Likelihood-Schätzer $(\hat{\mu}_{ML}, \hat{\lambda}_{ML})$ für $(\mu, \lambda)$.

**Aufgabe 3** (Maximum-Likelihood-Schätzer II) (3+1 Punkte)
Es seien $X_1, \ldots, X_n$ unabhängige, geometrisch-verteilte Zufallsgrößen ($X_i \sim \mathrm{Geo}(p)$) mit Zähldichte

$$\mathbb{P}(X_1 = k) = p(1-p)^{k-1}, \quad k = 1, \ldots, n.$$

(a) Bestimmen Sie den Maximum-Likelihood-Schätzer $\hat{p}_{ML}$ für $p$.

(b) Ist dieser Schätzer erwartungstreu? Begründen Sie Ihre Antwort.

*Bitte wenden!*

**Aufgabe 4** ($\delta$-Methode) (1+1+2 Punkte)

(a) Es sei $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge von Zufallsvariablen, so dass

$$\sqrt{n}X_n \longrightarrow_{\mathcal{L}} \mathcal{N}(0,1).$$

Bestimmen Sie den Grenzwert in Verteilung von $\sqrt{n}(\exp(X_n)-1)$.

(b) Begründen Sie, wieso die $\delta$-Methode (Satz 2.13) auch für Funktionen $g\colon \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$ gilt, die nur lokal um $\mu$ stetig differenzierbar sind.

(c) Verwenden Sie (b) um zu zeigen, dass der Schätzer aus Aufgabe 4 von Blatt 02 asymptotisch normalverteilt ist und bestimmen Sie Erwartungswert und Varianz der Grenzverteilung.

**Aufgaben zur Selbstkontrolle**

(1) Formulieren Sie die Definition der Dichte der mehrdimensionalen Normalverteilung und verifizieren Sie, dass diese Definition für den Fall $d = 1$ mit der Definition der Dichte der eindimensionalen Normalverteilung übereinstimmt.

(2) Wiederholen Sie die Definition der Likelihood-Funktion.

(3) Definieren Sie den Maximum-Likelihood-Schätzer.

(4) Wiederholen Sie die Definition des Mittleren Quadratischen Fehlers.

(5) Verwenden Sie die Jensen'sche Ungleichung um zu folgern, dass für jede konkave Funktion $\varphi\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ und eine reellwertige Zufallsvariable $X$ mit $\mathbb{E}[|X|] < \infty$ gilt, dass

$$\varphi(\mathbb{E}[X]) \geq \mathbb{E}[\varphi(X)].$$