Übungen zur Vorlesung "Lineare Algebra II"

Anwesenheitsaufgaben

Aufgabe 1

Es seien Basen $B = (b_1, b_2, b_3, b_4)$ und $C = (c_1, c_2, c_3, c_4)$ des $\mathbb{R}^4$ gegeben durch

$$b_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 3 \\ 3 \end{pmatrix}, \quad b_2 = \begin{pmatrix} -2 \\ -3 \\ -5 \\ -4 \end{pmatrix}, \quad b_3 = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 5 \\ 4 \end{pmatrix}, \quad b_4 = \begin{pmatrix} -2 \\ -3 \\ -4 \\ -4 \end{pmatrix}.$$

und

$$c_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad c_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad c_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad c_4 = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$$

Bestimmen Sie die Transformationsmatrix T_C^B.

Aufgabe 2

Eine lineare Abbildung $f : \mathbb{R}^4 \longrightarrow \mathbb{R}^4$ habe die Darstellungsmatrix

$$M_C^B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & -1 \\ 0 & 3 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & -2 & 1 \end{pmatrix}$$

bezüglich der Basen B und C aus Aufgabe 1. Bestimmen Sie die darstellende Matrix dieser Abbildung bezüglich der Standardbasis des $\mathbb{R}^4$.

Aufgabe 3

Wir betrachten den $\mathbb{R}$-Vektorraum $\mathbb{R}[t]_n := \{P \in \mathbb{R}[t] \mid \deg(P) \leq n\} \cup \{0\}$ sowie die Abbildung $I : \mathbb{R}[t]_4 \longrightarrow \mathbb{R}[t]_5$ mit

$$P = \sum_{k=0}^{4} a_k t^k \mapsto \sum_{k=0}^{4} \frac{a_k}{k+1} t^{k+1}.$$

(a) Zeigen Sie, dass I $\mathbb{R}$-linear ist.

(b) Bestimmen Sie die Darstellungsmatrix von I bezüglich der Basen $B_1 = (1, t, t^2, t^3, t^4)$ und $B_2 = (1, t, t^2, t^3, t^4, t^5)$.

Aufgabe 4

Es sei $A \in M(m \times n, \mathbb{R})$. Zeigen Sie, dass $\mathrm{Rang}(A) = \mathrm{Rang}(A^t) = \mathrm{Rang}(AA^t)$. Gilt dies auch, falls $A \in M(m \times n, \mathbb{C})$?