Albert-Ludwigs-Universität Freiburg
Mathematisches Institut
Prof. Dr. Thorsten Schmidt / Marc Weber

SoSe 2019

Probeklausur zur Stochastik

16. Juli 2019

Name: ______________________

Vorname: ______________________

Matrikelnummer: ______________________

Unterschrift: ______________________

Formales

- Die Bearbeitungszeit der Klausur beträgt 120 Minuten.
- Verwenden Sie einen nicht-roten Füller, Kugel- oder Tintenschreiber. Alles von Ihnen mit Bleistift Geschriebene kann nicht gewertet werden, unabhängig davon, ob es falsch oder richtig sein sollte.
- Das einzige zugelassene Hilfsmittel ist ein doppelseitig beschriebenes DIN-A4-Blatt. Mobiltelefone sind grundsätzlich komplett auszuschalten und außerhalb der Reichweite des Arbeitsplatzes abzulegen. Jeder Täuschungsversuch wird mit der Note „nicht bestanden“ (5,0) geahndet. Bei Rechenaufgaben reicht es, die Zahlenergebnisse in einer möglichst vereinfachten Form zu präsentieren, in der man sie in einen Taschenrechner eingeben würde.
- Jede Aufgabe ist auf den zwei dafür vorgesehenen Seiten zu bearbeiten. Sollten diese für Ihre Lösung nicht ausreichen, verwenden Sie bitte die leeren Blätter am Ende der Klausur und **vermerken Sie deutlich**, zu welcher Aufgabe das jeweilige Blatt gehört. Jedes Blatt, das in die Bewertung eingehen soll, ist mit Ihrem Namen zu versehen.

1	2	3	4	5	6	$\sum$
(10)	(10)	(10)	(10)	(10)	(10)	(60)

Viel Erfolg!

Aufgabe 1 (10 Punkte)

In einem Behälter befinden sich 3 Würfel W_1, W_2 und W_3. W_1 ist ein fairer Würfel. W_2 liefert als Wurfergebnis mit einer Wahrscheinlichkeit von je $\frac{1}{2}$ die Zahlen 2 und 4; W_3 liefert stets die 4. Es wird ein Würfel zufällig herausgenommen und n mal ausgespielt.

(a) Stellen Sie einen geeigneten Grundraum auf und definieren Sie das zugrunde liegende Wahrscheinlichkeitsmaß genau (d.h. es muss auch die Mächtigkeit des Grundraums bestimmt werden).

(b) Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass bei allen n Würfen eine 4 fällt?

(c) Bestimmen Sie die (bedingte) Wahrscheinlichkeit dafür, dass der Würfel W_1 (bzw. W_2, bzw. W_3) entnommen wurde, falls bei allen n Würfen eine 4 fällt.

Name: ....

Aufgabe 2 (10 Punkte)

Eine Person hat in ihrer linken Hosentasche drei 1 Euro Stücke und zwei 50 Cent Stücke, in der rechten zwei 1 Euro Stücke und fünf 50 Cent Stücke. Sie greift in die linke Tasche, wählt drei Münzen zufällig aus und steckt diese in die rechte Tasche. Dann zieht sie aus der rechten Tasche eine Münze zufällig heraus. Mit welcher Wahrscheinlichkeit ist diese ein 1 Euro Stück? Achten Sie auf sauberen Formalismus.

Name: ....

Aufgabe 3 (10 Punkte)

Es sei $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge von unabhängigen Zufallsvariablen, die alle geometrisch verteilt zum Parameter $0 < p < 1$ sind. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass unendlich oft $X_n \geq n+1$ gilt? Ist die Forderung der Unabhängigkeit notwendig und falls ja, warum?

Name: ....

Aufgabe 4 (10 Punkte)

Eine Zufallsvariable T heißt Weibull-verteilt zu den Parametern $\alpha, \lambda > 0$, falls ihre Verteilung die Dichte

$$f(t) = \lambda \, \alpha t^{\alpha-1} \exp(-\lambda t^{\alpha}) 1_{[0,\infty)}(t)$$

besitzt.

(a) Die Zufallsvariable V sei zum Parameter $\lambda > 0$ exponentialverteilt. Zeigen Sie, dass $V^{1/\alpha}$, $\alpha > 0$, Weibull-verteilt ist zu den Parametern α, λ.

(b) Zeigen Sie: Ist U eine gleichverteilte Zufallsvariable auf $(0, 1)$ und sind $\alpha, \lambda > 0$, so ist

$$S := (-\lambda^{-1} \log(U))^{\frac{1}{\alpha}}$$

Weibull-verteilt zu den Parametern α, λ.

Name: ....

Aufgabe 5 (10 Punkte)

Eine i.i.d.-Stichprobe $X_1, ..., X_n$ sei invers Gamma-verteilt mit der Dichte

$$p_{\alpha,\beta}(x) := \frac{\beta^\alpha}{\Gamma(\alpha)} x^{-(\alpha+1)} exp\left(-\frac{\beta}{x}\right) 1_{x>0},$$

wobei $\alpha, \beta > 0$.

(a) Weisen Sie nach, dass $p_{\alpha,\beta}(x)$ tatsächlich eine Dichte ist.

(b) Finden Sie eine zweidimensionale suffiziente Statistik für α und β.

Name: ....

Aufgabe 6 (10 Punkte)

Betrachtet werden i.i.d. Zufallsvariablen $(Y_1, Z_1), \ldots, (Y_n, Z_n)$. Weiterhin seien Y_1 und Z_1 unabhängig und exponentialverteilt mit Parametern $\lambda > 0$ bzw. $\mu > 0$. Bestimmen Sie den Maximum-Likelihood-Schätzer für (λ, μ).

Name: ....

Name: ....

Name: ....