Albert-Ludwigs-Universität Freiburg

Vorlesungsskript

Markov-Ketten

apl. Prof. Dr. Stefan Tappe

Sommersemester 2018

Abteilung für Mathematische Stochastik

Inhaltsverzeichnis

Kapitel 1

Grundlagen

1.1 Stochastische Prozesse

Es sei $(\Omega, \mathscr{F}, \mathbb{P})$ ein Wahrscheinlichkeitsraum. Weiterhin sei $(E, \mathscr{E})$ ein messbarer Raum.

Definition 1.1.1. *Eine Abbildung $X : \Omega \to E$ heißt eine Zufallsvariable, falls sie messbar ist; das heißt $X^{-1}(B) \in \mathscr{F}$ für alle $B \in \mathscr{E}$.*

Definition 1.1.2. *Ein E-wertiger stochastischer Prozess (oder kurz, ein Prozess) ist eine Familie $X = (X_n)_{n \in \mathbb{N}_0}$ von Zufallsvariablen.*

Definition 1.1.3. *Es sei $I \subset \mathbb{N}_0$ eine beliebige Indexmenge.*

(a) Wir bezeichnen mit E^I den Produktraum aller Abbildungen $\omega : I \to E$.

(b) Für $n \in I$ definieren wir die n-te Koordinatenabbildung

$$X_n : E^I \to E, \quad \omega \mapsto \omega(n).$$

(c) Die Produkt-σ-Algebra $\mathscr{E}^{\otimes I}$ auf dem Produktraum E^I ist definiert durch

$$\mathscr{E}^{\otimes I} := \sigma(X_n : n \in I).$$

Definition 1.1.4. *Es seien $I \subset J \subset \mathbb{N}_0$ zwei Indexmengen.*

(a) Wir definieren die kanonische Projektion

$$X_I^J : E^J \to E^I, \quad \omega \mapsto \omega|_I.$$

(b) Speziell setzen wir $X_I := X_I^{\mathbb{N}_0}$.

Nun definieren wir den messbaren Raum

$$(\Omega, \mathscr{F}) := (E^{\mathbb{N}_0}, \mathscr{E}^{\otimes \mathbb{N}_0}).$$

Definition 1.1.5. *Eine Familie $\{\mathbb{P}_I : I \subset \mathbb{N}_0 \text{ endlich}\}$ von Wahrscheinlichkeitsmaßen auf $(E^I, \mathscr{E}^{\otimes I})$ heißt eine projektive Familie, falls für alle endlichen $I \subset J \subset \mathbb{N}_0$ gilt*

$$\mathbb{P}_I = \mathbb{P}_J \circ X_I^J.$$

Satz 1.1.6 (Erweiterungssatz von Kolmogorov)**.** *Es sei $\{\mathbb{P}_I : I \subset \mathbb{N}_0 \text{ endlich}\}$ eine projektive Familie von Wahrscheinlichkeitsmaßen. Dann existiert ein eindeutig bestimmtes Wahrscheinlichkeitsmaß auf $\mathbb{P}$ auf $(\Omega, \mathscr{F})$, so dass*

$$\mathbb{P}_I = \mathbb{P} \circ X_I \quad \text{für jedes endliche } I \subset \mathbb{N}_0.$$

Beweis. Folgt aus [Kle13, Satz 14.36]. □

Definition 1.1.7. *Wir nennen $\mathbb{P}$ den projektiven Limes der Familie*

$$\{\mathbb{P}_I : I \subset \mathbb{N}_0 \text{ endlich}\}.$$

1.2 Die Markov-Eigenschaft

$(\Omega, \mathscr{F}, \mathbb{P})$ bezeichnet weiterhin einen Wahrscheinlichkeitsraum.

Definition 1.2.1. *Es sei $B \in \mathscr{F}$ ein Ereignis mit $\mathbb{P}(B) > 0$. Dann definieren wir das Wahrscheinlichkeitsmaß $\mathbb{P}^B$ auf $(\Omega, \mathscr{F})$ durch*

$$\mathbb{P}^B(A) := \mathbb{P}(A \,|\, B) := \frac{\mathbb{P}(A \cap B)}{\mathbb{P}(B)}, \quad A \in \mathscr{F}.$$

Lemma 1.2.2. *Es seien $B, C \in \mathscr{F}$ mit $\mathbb{P}(B \cap C) > 0$. Dann gilt*

$$(P^B)^C = \mathbb{P}^{B \cap C}.$$

Beweis. Übung. □

Satz 1.2.3 (Multiplikationsregel)**.** *Es seien $A_1, \ldots, A_n \in \mathscr{F}$ Ereignisse mit $\mathbb{P}(A_1 \cap \ldots \cap A_{n-1}) > 0$ für ein $n \geq 2$. Dann gilt*

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(A_1 \cap \ldots \cap A_n) = \mathbb{P}(A_1) \cdot \mathbb{P}(A_2 \,|\, A_1) \cdot \mathbb{P}(A_3 \,|\, A_1 \cap A_2) \\ \cdot \ldots \cdot \mathbb{P}(A_n \,|\, A_1 \cap \ldots \cap A_{n-1}).\end{aligned}$$

Satz 1.2.4 (Satz von der totalen Wahrscheinlichkeit). *Es seien I eine höchstens abzählbare Indexmenge und $(B_i)_{i\in I} \subset \mathscr{F}$ paarweise disjunkte Ereignisse mit $\mathbb{P}(B_i) > 0$, $i \in I$ und $\mathbb{P}(\bigcup_{i\in I} B_i) = 1$. Dann gilt für jedes Ereignis $A \in \mathscr{F}$ die Identität*

$$\mathbb{P}(A) = \sum_{i\in I} \mathbb{P}(A \mid B_i) \cdot \mathbb{P}(B_i).$$

Definition 1.2.5. *Ein messbarer Raum $(E, \mathscr{E})$ heißt ein diskreter Zustandsraum, falls E höchstens abzählbar (das heißt, endlich oder abzählbar) ist, und $\mathscr{E} = \mathscr{P}(E)$.*

Von nun an sei $(E, \mathscr{E})$ ein diskreter Zustandsraum.

Definition 1.2.6. *Ein E-wertiger Prozess X besitzt die Markov-Eigenschaft, falls*

$$\mathbb{P}(X_{n+1} = i_{n+1} \mid X_0 = i_0, \ldots, X_n = i_n) = \mathbb{P}(X_{n+1} = i_{n+1} \mid X_n = i_n)$$

für alle $n \in \mathbb{N}_0$ und $i_0, \ldots, i_n, i_{n+1} \in E$ mit

$$\mathbb{P}(X_0 = i_0, \ldots, X_n = i_n) > 0.$$

Definition 1.2.7. *Ein E-wertiger Prozess X heißt eine Markov-Kette, falls er die Markov-Eigenschaft besitzt.*

Definition 1.2.8. *Es seien X eine Zufallsvariable mit Werten in einem messbaren Raum $(G, \mathscr{G})$, und es $B \in \mathscr{F}$ ein Ereignis mit $\mathbb{P}(B) > 0$. Dann ist das Wahrscheinlichkeitsmaß $\mathbb{P}^{X|B}$ auf $(G, \mathscr{G})$ definiert durch*

$$\mathbb{P}^{X|B}(A) := \mathbb{P}^B(X \in A), \quad A \in \mathscr{G}.$$

Lemma 1.2.9. *Es sei X ein E-wertiger Prozess. Dann sind folgende Aussagen äquivalent:*

(i) X besitzt die Markov-Eigenschaft.

(ii) Es gilt

$$\mathbb{P}^{X_{n+1}|X_0=i_0,\ldots,X_n=i_n} = \mathbb{P}^{X_{n+1}|X_n=i_n}$$

für alle $n \in \mathbb{N}_0$ und $i_0, \ldots, i_n \in E$ mit

$$\mathbb{P}(X_0 = i_0, \ldots, X_n = i_n) > 0.$$

Beweis. Übung. □

Satz 1.2.10. *Für einen E-wertigen Prozess X sind folgende Aussagen äquivalent:*

(i) Für alle $n \in \mathbb{N}_0$ *und* $i_0, \ldots, i_n \in E$ *mit*

$$\mathbb{P}(X_0 = i_0, \ldots, X_n = i_n) > 0$$

gilt

$$\mathbb{P}^{(X_k)_{k \geq n} | X_0 = i_0, \ldots, X_n = i_n} = \mathbb{P}^{(X_k)_{k \geq n} | X_n = i_n}.$$

(ii) Für alle $n \in \mathbb{N}_0$ *und* $i \in E$ *mit* $\mathbb{P}(X_n = i) > 0$ *sind* $(X_k)_{k \leq n}$ *und* $(X_k)_{k \geq n}$ *unter* $\mathbb{P}^{X_n = i}$ *unabhängig.*

Beweis. (i) $\Rightarrow$ (ii): Es seien $i_0, \ldots, i_{n+l} \in E$ für ein $l \in \mathbb{N}$ beliebig. Wir dürfen annehmen, dass $i_n = i$. Dann folgt

$$\begin{aligned}
&\mathbb{P}^{X_n = i}(\{X_0 = i_0, \ldots, X_n = i_n\} \cap \{X_n = i_n, \ldots, X_{n+l} = i_{n+l}\}) \\
&= \mathbb{P}^{X_n = i}(X_0 = i_0, \ldots, X_n = i_n) \cdot \mathbb{P}^{X_0 = i_0, \ldots, X_n = i_n}(X_n = i_n, \ldots, X_{n+l} = i_{n+l}) \\
&= \mathbb{P}^{X_n = i}(X_0 = i_0, \ldots, X_n = i_n) \cdot \mathbb{P}^{X_n = i}(X_n = i_n, \ldots, X_{n+l} = i_{n+l}).
\end{aligned}$$

(ii) $\Rightarrow$ (i): Für $B \in \mathscr{E}^{\otimes \mathbb{N}}$ gilt wegen der Unabhängigkeit

$$\begin{aligned}
&\mathbb{P}((X_k)_{k \geq n} \in B \,|\, X_0 = i_0, \ldots, X_n = i_n) \\
&= \mathbb{P}^{X_n = i_n}((X_k)_{k \geq n} \in B \,|\, X_0 = i_0, \ldots, X_n = i_n) \\
&= \mathbb{P}^{X_n = i_n}((X_k)_{k \geq n} \in B) \\
&= \mathbb{P}((X_k)_{k \geq n} \in B \,|\, X_n = i_n).
\end{aligned}$$

□

Definition 1.2.11. *Eine Funktion* $\pi : E \to [0,1]$ *heißt ein stochastischer Vektor, falls*

$$\sum_{i \in E} \pi_i = 1.$$

Beispiel 1.2.12. *Für jedes* $i \in E$ *ist* $\delta_i : E \to [0,1]$ *gegeben durch*

$$\delta_i(j) := \begin{cases} 1, & \text{falls } j = i, \\ 0, & \text{sonst} \end{cases}$$

ein stochastischer Vektor.

Definition 1.2.13. *Eine Funktion* $P : E \times E \to [0,1]$ *heißt eine stochastische Matrix, falls*

$$\sum_{j \in E} p_{ij} = 1 \quad \text{für alle } i \in E,$$

wobei wir die Notation $P = (p_{ij})$ *benutzen.*

Definition 1.2.14. *Es seien π ein stochastischer Vektor und P eine stochastische Matrix. Eine Markov-Kette X heißt eine zeitlich homogene (oder kurz homogene) Markov-Kette mit Anfangsverteilung π und Übergangsmatrix P, falls gilt:*

(a) $\mathbb{P}(X_0 = i) = \pi_i$ *für alle* $i \in E$.

(b) $\mathbb{P}(X_{n+1} = j \,|\, X_n = i) = p_{ij}$ *für alle* $n \in \mathbb{N}_0$ *und* $i, j \in E$ *mit* $\mathbb{P}(X_n = i) > 0$.

In diesem Fall nennen wir X auch kurz eine (π, P)-MK.

Satz 1.2.15. *Für einen Prozess X sind folgende Aussagen äquivalent:*

(i) X *ist eine* (π, P)*-MK.*

(ii) Für alle $n \in \mathbb{N}_0$ *und alle* $i_0, i_1, \ldots, i_n \in E$ *gilt*

$$\mathbb{P}(X_0 = i_0, X_1 = i_1, \ldots, X_n = i_n) = \pi_{i_0} \cdot p_{i_0,i_1} \cdot \ldots \cdot p_{i_{n-1},i_n}.$$

Beweis. (i) $\Rightarrow$ (ii): Wir dürfen annehmen, dass

$$\mathbb{P}(X_0 = i_0, \ldots, X_{n-1} = i_{n-1}) > 0.$$

(Warum?) Nach der Multiplikationsregel (Satz 1.2.3) gilt

$$\begin{aligned}
&\mathbb{P}(X_0 = i_0, X_1 = i_1, \ldots, X_n = i_n) \\
&= \mathbb{P}(X_0 = i_0) \cdot \mathbb{P}(X_1 = i_1 \,|\, X_0 = i_0) \cdot \mathbb{P}(X_2 = i_2 \,|\, X_0 = i_0, X_1 = i_1) \\
&\quad \cdot \ldots \cdot \mathbb{P}(X_n = i_n \,|\, X_0 = i_0, \ldots, X_{n-1} = i_{n-1}) \\
&= \mathbb{P}(X_0 = i_0) \cdot \mathbb{P}(X_1 = i_1 \,|\, X_0 = i_0) \cdot \mathbb{P}(X_2 = i_2 \,|\, X_1 = i_1) \\
&\quad \cdot \ldots \cdot \mathbb{P}(X_n = i_n \,|\, X_{n-1} = i_{n-1}) \\
&= \pi_{i_0} \cdot p_{i_0,i_1} \cdot \ldots \cdot p_{i_{n-1},i_n}.
\end{aligned}$$

(ii) $\Rightarrow$ (i): Es gilt

$$\mathbb{P}(X_0 = i) = \pi_i \quad \text{für alle } i \in E.$$

Nun seien $n \in \mathbb{N}_0$ und $i_0, i_1, \ldots, i_n, i_{n+1} \in E$ mit

$$\mathbb{P}(X_n = i_n, \ldots, X_0 = i_0) > 0$$

beliebig. Dann gilt

$$\begin{aligned}
&\mathbb{P}(X_{n+1} = i_{n+1} \,|\, X_n = i_n, \ldots, X_0 = i_0) \\
&= \frac{\mathbb{P}(X_{n+1} = i_{n+1}, X_n = i_n, \ldots, X_0 = i_0)}{\mathbb{P}(X_n = i_n, \ldots, X_0 = i_0)} \\
&= \frac{\pi_{i_0} \cdot p_{i_0,i_1} \cdot \ldots \cdot p_{i_{n-1},i_n} \cdot p_{i_n,i_{n+1}}}{\pi_{i_0} \cdot p_{i_0,i_1} \cdot \ldots \cdot p_{i_{n-1},i_n}} = p_{i_n,i_{n+1}}.
\end{aligned}$$

Nun seien $i_n, i_{n+1} \in E$ mit

$$\mathbb{P}(X_n = i_n) > 0$$

beliebig. Mit dem Satz von der totalen Wahrscheinlichkeit (Satz 1.2.4) folgt

$$\begin{aligned}
&\mathbb{P}^{X_n=i_n}(X_{n+1} = i_{n+1}) \\
&= \sum_{\substack{i_0,\ldots,i_{n-1}\in E \\ \mathbb{P}(X_n=i_n,\ldots,X_0=i_0)>0}} \mathbb{P}^{X_n=i_n}(X_{n+1} = i_{n+1} \,|\, X_{n-1} = i_{n-1}, \ldots, X_0 = i_0) \\
&\quad \cdot \mathbb{P}^{X_n=i_n}(X_{n-1} = i_{n-1}, \ldots, X_0 = i_0) \\
&= p_{i_n,i_{n+1}} \sum_{\substack{i_0,\ldots,i_{n-1}\in E \\ \mathbb{P}(X_n=i_n,\ldots,X_0=i_0)>0}} \mathbb{P}^{X_n=i_n}(X_{n-1} = i_{n-1}, \ldots, X_0 = i_0) = p_{i_n,i_{n+1}}.
\end{aligned}$$

□

Satz 1.2.16. *Es sei X ist eine (π, P)-MK. Weiterhin seien $n \in \mathbb{N}_0$ und $i \in E$ mit $\mathbb{P}(X_n = i) > 0$ beliebig. Dann gelten folgende Aussagen:*

(a) Für alle $B_0, \ldots, B_n \subset E$, $l \in \mathbb{N}$ und $i_n, \ldots, i_{n+l} \in E$ gilt

$$\begin{aligned}
&\mathbb{P}^{X_n=i}(\{X_0 \in B_0, \ldots, X_n \in B_n\} \cap \{X_n = i_n, \ldots, X_{n+l} = i_{n+l}\}) \\
&= \mathbb{P}^{X_n=i}(X_0 \in B_0, \ldots, X_n \in B_n) \cdot \delta_i(i_n) \cdot p_{i_n,i_{n+1}} \cdot \ldots \cdot p_{i_{n+l-1},i_{n+l}}.
\end{aligned}$$

(b) Der Prozess $(X_{n+k})_{k\in\mathbb{N}_0}$ ist unter $\mathbb{P}^{X_n=i}$ eine (δ_i, P)-MK.

(c) Die Zufallsvariablen $(X_k)_{k\leq n}$ und $(X_k)_{k\geq n}$ sind unter $\mathbb{P}^{X_n=i}$ unabhängig.

(d) Für alle $i_0, \ldots, i_n \in E$ mit $i_n = i$ und

$$\mathbb{P}(X_0 = i_0, \ldots, X_n = i_n) > 0$$

gilt

$$\mathbb{P}^{(X_k)_{k\geq n}|X_0=i_0,\ldots,X_n=i_n} = \mathbb{P}^{(X_k)_{k\geq n}|X_n=i_n}.$$

Beweis.

(a) Es genügt, für alle $i_0, \ldots, i_{n+l} \in E$ mit $i_n = i$ zu zeigen

$$\begin{aligned}
&\mathbb{P}^{X_n=i_n}(\{X_0 = i_0, \ldots, X_n = i_n\} \cap \{X_n = i_n, \ldots, X_{n+l} = i_{n+l}\}) \\
&= \mathbb{P}^{X_n=i_n}(X_0 = i_0, \ldots, X_n = i_n) \cdot p_{i_n,i_{n+1}} \cdot \ldots \cdot p_{i_{n+l-1},i_{n+l}}.
\end{aligned}$$

Dies folgt mit Satz 1.2.15

$$\begin{aligned}
&\mathbb{P}^{X_n=i_n}(X_0 = i_0, \ldots, X_n = i_n, \ldots, X_{n+l} = i_{n+l}) \\
&= \frac{\mathbb{P}(X_0 = i_0, \ldots, X_n = i_n, \ldots, X_{n+l} = i_{n+l})}{\mathbb{P}(X_n = i_n)} \\
&= \frac{\pi_{i_0} \cdot p_{i_0,i_1} \cdot \ldots \cdot p_{i_{n-1},i_n} \cdot p_{i_n,i_{n+1}} \cdot \ldots \cdot p_{i_{n+l-1},i_{n+l}}}{\mathbb{P}(X_n = i_n)} \\
&= \frac{\mathbb{P}(X_0 = i_0, \ldots, X_n = i_n)}{\mathbb{P}(X_n = i_n)} \cdot p_{i_n,i_{n+1}} \cdot \ldots \cdot p_{i_{n+l-1},i_{n+l}}
\end{aligned}$$

(b) Mit $B_0 = \ldots = B_n = E$ folgt aus Teil (a), dass

$$\mathbb{P}^{X_n=i}(X_n = i_n, \ldots, X_{n+l} = i_{n+l}) = \delta_i(i_n) \cdot p_{i_n,i_{n+1}} \cdot \ldots \cdot p_{i_{n+l-1},i_{n+l}}.$$

Nach Satz 1.2.15 folgt also, dass $(X_{n+k})_{k\in\mathbb{N}_0}$ unter $\mathbb{P}^{X_n=i}$ eine (δ_i, P)-MK ist.

(c) Setzen wir die Gleichung aus Teil (b) in Teil (a) ein, so folgt

$$\begin{aligned}
&\mathbb{P}^{X_n=i}(\{X_0 = i_0, \ldots, X_n = i_n\} \cap \{X_n = i_n, \ldots, X_{n+l} = i_{n+l}\}) \\
&= \mathbb{P}^{X_n=i}(X_0 = i_0, \ldots, X_n = i_n) \cdot \mathbb{P}^{X_n=i}(X_n = i_n, \ldots, X_{n+l} = i_{n+l}\}),
\end{aligned}$$

was die Unabhängigkeit beweist.

(d) Folgt aus Satz 1.2.10.

□

1.3 Filtrationen und Stoppzeiten

Definition 1.3.1. *Eine Filtration $(\mathscr{F}_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ ist eine Familie von Sub-σ-Algebren von $\mathscr{F}$, so dass $\mathscr{F}_m \subset \mathscr{F}_n$ für alle $m, n \in \mathbb{N}_0$ mit $m \leq n$.*

Bemerkung 1.3.2. *Eine Familie $(\mathscr{F}_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ von Sub-σ-Algebren von $\mathscr{F}$ ist genau dann eine Filtration, wenn $\mathscr{F}_n \subset \mathscr{F}_{n+1}$ für alle $n \in \mathbb{N}_0$ gilt.*

Definition 1.3.3. *Es seien $X = (X_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ ein Prozess und $\mathbb{F} = (\mathscr{F}_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ eine Filtration. X heißt $\mathbb{F}$-adpatiert (oder kurz adaptiert), falls X_n für jedes $n \in \mathbb{N}_0$ bezüglich $\mathscr{F}_n$ messbar ist.*

Lemma 1.3.4. *Es sei $X = (X_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ ein Prozess. Wir definieren die Familie $\mathbb{F}^X = (\mathscr{F}_n^X)_{n\in\mathbb{N}_0}$ durch*

$$\mathscr{F}_n^X := \sigma(X_0, \ldots, X_n) \quad \textit{für } n \in \mathbb{N}_0.$$

Dann gelten folgende Aussagen:

(a) $\mathbb{F}^X$ *ist eine Filtration.*

(b) X *ist* $\mathbb{F}^X$*-adpatiert.*

(c) *Ist* $\mathbb{F} = (\mathscr{F}_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ *eine weitere Filtration, so dass* X *bezüglich* $\mathbb{F}$ *adaptiert ist, dann gilt* $\mathscr{F}_n^X \subset \mathscr{F}_n$ *für alle* $n \in \mathbb{N}_0$*.*

Beweis. Übung. □

Definition 1.3.5. *Wir nennen* $\mathbb{F}^X$ *die von* X *erzeugte Filtration.*

Im Folgenden sei $\mathbb{F} = (\mathscr{F}_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ eine Filtration.

Definition 1.3.6. *Eine Abbildung* $\tau : \Omega \to \overline{\mathbb{N}}_0 = \mathbb{N}_0 \cup \{\infty\}$ *heißt eine* $\mathbb{F}$*-Stoppzeit (oder kurz, eine Stoppzeit), falls*

$$\{\tau \leq n\} \in \mathscr{F}_n \quad \text{für alle } n \in \mathbb{N}_0.$$

Lemma 1.3.7. *Es sei* $\tau : \Omega \to \overline{\mathbb{N}}_0$ *eine Abbildung. Dann sind folgende Aussagen äquivalent:*

(i) τ *ist eine Stoppzeit.*

(ii) *Es gilt* $\{\tau = n\} \in \mathscr{F}_n$ *für alle* $n \in \mathbb{N}_0$*.*

Beweis. Übung. □

Satz 1.3.8. *Es gelten folgende Aussagen:*

(a) *Für jedes* $n \in \overline{\mathbb{N}}_0$ *ist die konstante Abbildung* $\tau \equiv n$ *eine Stoppzeit.*

(b) *Für zwei Stoppzeiten* σ, τ *sind* $\sigma \wedge \tau$, $\sigma \vee \tau$ *und* $\sigma + \tau$ *ebenfalls Stoppzeiten.*

(c) *Für eine Konstante* $\alpha \in \mathbb{N}$ *und eine Stoppzeit* τ *ist* $\alpha\tau$ *ebenfalls eine Stoppzeit.*

Beweis. Übung. □

Definition 1.3.9. *Für eine Stoppzeit* τ *bezeichnen wir mit*

$$\mathscr{F}_\tau := \{A \in \mathscr{F} : A \cap \{\tau \leq n\} \in \mathscr{F}_n \text{ für alle } n \in \mathbb{N}_0\}$$

das Mengensystem der bis τ *beobachtbaren Ereignisse.*

Satz 1.3.10. *Es sei* τ *eine Stoppzeit.*

(a) $\mathscr{F}_\tau$ *ist eine* σ*-Algebra über* Ω*.*

(b) Es gilt

$$\mathscr{F}_\tau = \{A \in \mathscr{F} : A \cap \{\tau = n\} \in \mathscr{F}_n \textit{ für alle } n \in \mathbb{N}_0\}.$$

(c) τ *ist* $\mathscr{F}_\tau$*-messbar.*

(d) Gilt $\tau \equiv n$ *für eine* $n \in \mathbb{N}_0$*, dann ist* $\mathscr{F}_\tau = \mathscr{F}_n$*.*

Beweis. Übung. □

Lemma 1.3.11. *Es seien* $X = (X_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ *ein adaptierter Prozess,* σ *eine Stoppzeit und* $B \subset E$ *eine Menge. Dann ist die Abbildung*

$$\tau : \Omega \to \overline{\mathbb{N}}_0, \quad \tau := \min\{n \geq \sigma : X_n \in B\}$$

eine Stoppzeit.

Beweis. Übung. □

1.4 Die starke Markov-Eigenschaft

Satz 1.4.1 (Starke Markov-Eigenschaft)**.** *Es seien* X *eine* (π, P)*-MK,* τ *eine* $\mathbb{F}^X$*-Stoppzeit und* $i \in E$ *ein Zustand. Wir setzen* $A := \{\tau < \infty\} \cap \{X_\tau = i\}$ *und nehmen an, dass* $\mathbb{P}(A) > 0$*. Dann gelten folgende Aussagen:*

(a) Für alle $B \in \mathscr{F}_\tau^X$*,* $n \in \mathbb{N}$ *und* $i_0, \dots, i_n \in E$ *gilt*

$$\mathbb{P}^A(B \cap \{X_\tau = i_0, \dots, X_{\tau+n} = i_n\}) = \mathbb{P}^A(B) \cdot \delta_i(i_0) \cdot p_{i_0,i_1} \cdot \dots \cdot p_{i_{n-1},i_n}.$$

(b) Der Prozess $(X_{\tau+n})_{n\in\mathbb{N}_0}$ *ist unter* $\mathbb{P}^A$ *eine* (δ_i, P)*-MK, die von der* σ*-Algebra* $\mathscr{F}_\tau^X$ *unabhängig ist.*

Beweis.

(a) Zunächst sei $k \in \mathbb{N}_0$ mit $\mathbb{P}(X_k = i) > 0$ beliebig. Nach Satz 1.2.16 ist $(X_{k+n})_{n\in\mathbb{N}_0}$ unter $\mathbb{P}^{X_k=i}$ eine (δ_i, P)-MK, und die Zufallsvariablen $(X_l)_{l\leq k}$ und $(X_l)_{l\geq k}$ sind unter $\mathbb{P}^{X_k=i}$ unabhängig. Da

$$A = \bigcup_{k\in\mathbb{N}_0} \{\tau = k, X_k = i\},$$

folgt mit Satz 1.2.15 also

$$
\begin{aligned}
&\mathbb{P}^A(B \cap \{X_\tau = i_0, \ldots, X_{\tau+n} = i_n\}) \\
&= \sum_{k \in \mathbb{N}_0} \mathbb{P}^A(B \cap \{X_\tau = i_0, \ldots, X_{\tau+n} = i_n, \tau = k\}) \\
&= \sum_{k \in \mathbb{N}_0} \mathbb{P}^A(B \cap \{\tau = k\} \cap \{X_k = i_0, \ldots, X_{k+n} = i_n\}) \\
&= \frac{1}{\mathbb{P}(A)} \sum_{k \in \mathbb{N}_0} \mathbb{P}(B \cap \{\tau = k\} \cap \{X_k = i, X_k = i_0, \ldots, X_{k+n} = i_n\}) \\
&= \frac{1}{\mathbb{P}(A)} \sum_{\substack{k \in \mathbb{N}_0 \\ \mathbb{P}(X_k = i) > 0}} \mathbb{P}^{X_k = i}(\underbrace{B \cap \{\tau = k\}}_{\in \mathscr{F}_k^X} \cap \{X_k = i_0, \ldots, X_{k+n} = i_n\}) \cdot \mathbb{P}(X_k = i) \\
&= \frac{1}{\mathbb{P}(A)} \sum_{\substack{k \in \mathbb{N}_0 \\ \mathbb{P}(X_k = i) > 0}} \mathbb{P}^{X_k = i}(B \cap \{\tau = k\}) \cdot \mathbb{P}^{X_k = i}(X_k = i_0, \ldots, X_{k+n} = i_n) \cdot \mathbb{P}(X_k = i) \\
&= \frac{1}{\mathbb{P}(A)} \sum_{k \in \mathbb{N}_0} \mathbb{P}(B \cap \{\tau = k\} \cap \{X_k = i\}) \cdot \delta_i(i_0) \cdot p_{i_0, i_1} \cdot \ldots \cdot p_{i_{n-1}, i_n} \\
&= \frac{\mathbb{P}(B \cap A)}{\mathbb{P}(A)} \cdot \delta_i(i_0) \cdot p_{i_0, i_1} \cdot \ldots \cdot p_{i_{n-1}, i_n}.
\end{aligned}
$$

(b) Setzen wir $B = \Omega$ in Teil (a) ein, so folgt

$$
\mathbb{P}^A(X_\tau = i_0, \ldots, X_{\tau+n} = i_n) = \delta_i(i_0) \cdot p_{i_0, i_1} \cdot \ldots \cdot p_{i_{n-1}, i_n}.
$$

Nach Satz 1.2.15 ist $(X_{\tau+n})_{n \in \mathbb{N}_0}$ ist unter $\mathbb{P}^A$ eine (δ_i, P)-MK. Setzen wir nun die vorherige Formel in Teil (a) ein, so folgt

$$
\begin{aligned}
&\mathbb{P}^A(B \cap \{X_\tau = i_0, \ldots, X_{\tau+n} = i_n\}) \\
&= \mathbb{P}^A(B) \cdot \mathbb{P}^A(X_\tau = i_0, \ldots, X_{\tau+n} = i_n),
\end{aligned}
$$

was die Unabhängigkeit beweist.

□

1.5 Das Standardmodell

Definition 1.5.1. *Wir bezeichnen mit* Π *die Menge aller stochastischen Vektoren auf* E.

Satz 1.5.2. *Es sei P eine stochastische Matrix. Dann existieren ein messbarer Raum $(\Omega, \mathscr{F})$, darauf ein Prozess X, und eine Familie $(\mathbb{P}_\pi)_{\pi \in \Pi}$ von Wahrscheinlichkeitsmaßen, so dass X für jedes $\pi \in \Pi$ eine (π, P)-MK auf $(\Omega, \mathscr{F}, \mathbb{P}_\pi)$ ist.*

Beweis. Wir definieren den messbaren Raum

$$(\Omega, \mathscr{F}) := (E^{\mathbb{N}_0}, \mathscr{E}^{\otimes \mathbb{N}_0}),$$

wobei $\mathscr{E} = \mathscr{P}(E)$. Darauf definieren wir den Prozess $X = (X_n)_{n \in \mathbb{N}_0}$ durch die Koordinatenabbildungen

$$X_n : E^{\mathbb{N}_0} \to E, \quad \omega \mapsto \omega(n).$$

Nun sei $\pi \in \Pi$ beliebig. Wir definieren die Familie $\{\mathbb{P}_{\pi,I} : I \subset \mathbb{N}_0 \text{ endlich}\}$ wie folgt:

(1) Falls $I = \{0, 1, \dots, n\}$ für ein $n \in \mathbb{N}_0$, so definieren wir $\mathbb{P}_{\pi,I}$ durch

$$\mathbb{P}_{\pi,I}(\{(i_0, i_1, \dots, i_n)\}) := \pi_{i_0} \cdot p_{i_0,i_1} \cdot \ldots \cdot p_{i_{n-1},i_n}.$$

(2) Falls I nicht von der Form wie in Schritt (1) ist, so existiert ein $n \in \mathbb{N}_0$, so dass $I \subset J$, wobei $J = \{0, 1, \dots, n\}$. Wir setzen

$$\mathbb{P}_{\pi,I} := \mathbb{P}_{\pi,J} \circ X_I^J.$$

Die Familie $\{\mathbb{P}_{\pi,I} : I \subset \mathbb{N}_0 \text{ endlich}\}$ ist eine projektive Familie von Wahrscheinlichkeitsmaßen (Übung). Wir bezeichnen mit $\mathbb{P}_\pi$ den nach dem Erweiterungssatz von Kolmogorov (Satz 1.1.6) eindeutig bestimmten projetive Limes. Für alle $n \in \mathbb{N}_0$ und alle $i_0, i_1, \dots, i_n \in E$ gilt

$$\begin{aligned} \mathbb{P}_\pi(X_0 = i_0, X_1 = i_1, \dots, X_n = i_n) &= \mathbb{P}_{\pi,\{0,\dots,n\}}(\{(i_0, i_1, \dots, i_n)\}) \\ &= \pi_{i_0} \cdot p_{i_0,i_1} \cdot \ldots \cdot p_{i_{n-1},i_n}. \end{aligned}$$

Nach Satz 1.2.15 ist X eine (π, P)-MK auf $(\Omega, \mathscr{F}, \mathbb{P}_\pi)$. □

Definition 1.5.3. *Wir nennen $(\Omega, \mathscr{F}, X, (\mathbb{P}_\pi)_{\pi \in \Pi})$ ein Standardmodell zur Übergangsmatrix P.*

Definition 1.5.4. *Für jedes $i \in E$ setzen wir $\mathbb{P}_i := \mathbb{P}_{\delta_i}$.*

Nun sei ein Standardmodell zu einer Übergangsmatrix P gegeben.

Definition 1.5.5. *Für $n \in \mathbb{N}_0$ definieren wir die stochastische Matrix $P^{(n)} = (p_{ij}^{(n)})$ durch*

$$p_{ij}^{(n)} := \mathbb{P}_i(X_n = j), \quad i, j \in E.$$

Bemerkung 1.5.6. *Es gilt* $P^{(0)} = \mathrm{Id}$ *und* $P^{(1)} = P$.

Satz 1.5.7. *Es gilt* $P^{(n)} = P^n$ *für alle* $n \in \mathbb{N}_0$.

Beweis. Induktion nach $n \in \mathbb{N}_0$. Klar für $n = 0$ und $n = 1$. Induktionsschritt $n \to n+1$: Mit der Notation $P^n = (p^n_{ij})$ gilt für alle $i, j \in E$ nach Satz 1.2.15

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}_i(X_{n+1} = j) &= \sum_{i_0,\dots,i_n \in E} \mathbb{P}_i(X_0 = i_0, \dots, X_n = i_n, X_{n+1} = j) \\
&= \sum_{i_0,\dots,i_n \in E} \delta_i(i_0) \cdot p_{i_0,i_1} \cdot \ldots \cdot p_{i_{n-1},i_n} \cdot p_{i_n,j} \\
&= \sum_{i_0,\dots,i_n \in E} \mathbb{P}_i(X_0 = i_0, \dots, X_n = i_n) \cdot p_{i_n,j} \\
&= \sum_{i_n \in E} \sum_{i_0,\dots,i_{n-1} \in E} \mathbb{P}_i(X_0 = i_0, \dots, X_n = i_n) \cdot p_{i_n,j} \\
&= \sum_{i_n \in E} \mathbb{P}_i(X_n = i_n) \cdot p_{i_n,j} = \sum_{i_n \in E} p^n_{i,i_n} \cdot p_{i_n,j} = p^{n+1}_{ij}.
\end{aligned}$$

□

Satz 1.5.8 (Chapman-Kolmogorov-Gleichung)**.** *Es gilt für alle* $n, m \in \mathbb{N}_0$

$$P^{(n+m)} = P^{(n)} P^{(m)},$$

das heißt

$$p^{(n+m)}_{ij} = \sum_{k \in E} p^{(n)}_{ik} p^{(m)}_{kj} \quad \textit{für alle } i, j \in E.$$

Beweis. Nach Satz 1.5.7 gilt

$$P^{(n+m)} = P^{n+m} = P^n P^m = P^{(n)} P^{(m)}.$$

□

Korollar 1.5.9. *Es gilt für alle* $n, m \in \mathbb{N}_0$ *und* $i, j, k \in E$

$$p^{(n+m)}_{ij} \geq p^{(n)}_{ik} p^{(m)}_{kj}.$$

1.6 Beispiele

Beispiel 1.6.1 (Markov-Kette mit zwei Zuständen). *Es seien* $E = \{0, 1\}$ *und*

$$P = \begin{pmatrix} 1-p & p \\ q & 1-q \end{pmatrix}$$

mit $p, q \in [0, 1]$.

Beispiel 1.6.2 (Markov-Kette mit drei Zuständen). *Es seien* $E = \{0, 1, 2\}$ *und*

$$P = \begin{pmatrix} 1-p & p & 0 \\ q(1-p) & 1-q(1-p)-p(1-q) & p(1-q) \\ 0 & q & 1-p \end{pmatrix}$$

mit $p, q \in [0, 1]$.

Beispiel 1.6.3 (Irrfahrt mit reflektierenden Barrieren). *Es seien* $E = \{0, 1, \dots, N\}$ *und*

$$P = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & & & & 0 \\ 1-p & 0 & p & & & & \\ & & & \ddots & & & \\ & & & & 1-p & 0 & p \\ 0 & & & & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

mit $p \in (0, 1)$.

Beispiel 1.6.4 (Irrfahrt mit absorbierenden Barrieren). *Es seien* $E = \{0, 1, \dots, N\}$ *und*

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & & & & 0 \\ 1-p & 0 & p & & & & \\ & & & \ddots & & & \\ & & & & 1-p & 0 & p \\ 0 & & & & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

mit $p \in (0, 1)$.

Beispiel 1.6.5 (Symmetrische Irrfahrt). *Es seien* $E = \mathbb{Z}^d$ *und* $P = (p_{ij})$ *gegeben durch*

$$p_{ij} = \begin{cases} \frac{1}{2d}, & \textit{falls } |i-j|_1 = 1, \\ 0, & \textit{sonst,} \end{cases}$$

wobei $|i|_1 = \sum_{k=1}^{d} |i_k|$ *für* $i \in \mathbb{Z}^d$.

Beispiel 1.6.6 (Variante). *Es seien $E = \mathbb{Z}^d$ und $P = (p_{ij})$ gegeben durch*

$$p_{ij} = \begin{cases} \frac{1}{3^d-1}, & \text{falls } |i-j|_\infty = 1, \\ 0, & \text{sonst,} \end{cases}$$

wobei $|i|_\infty = \max_{k=1,\dots,d} |i_k|$ für $i \in \mathbb{Z}^d$.

Beispiel 1.6.7 (Allgemeine Irrfahrt). *Es seien $E = \mathbb{Z}^d$ und $(p_k)_{k=-d,\dots,d}$ ein stochastischer Vektor. Wir definieren $P = (p_{ij})$ durch*

$$p_{ij} = \begin{cases} p_0, & \text{falls } i = j, \\ p_{\lambda k}, & \text{falls } j = i + \lambda e_k \text{ mit } \lambda \in \{-1, 1\} \text{ und } k \in \{1, \dots, d\}, \\ 0, & \text{sonst.} \end{cases}$$

Beispiel 1.6.8 (Variante). *Es seien $E = \mathbb{Z}^d$ und $(p_\alpha)_{\alpha \in \{-1,0,1\}^d}$ ein stochastischer Vektor. Wir definieren $P = (p_{ij})$ durch*

$$p_{ij} = \begin{cases} p_\alpha, & \text{falls } j = i + \alpha \text{ mit } \alpha \in \{-1, 0, 1\}^d, \\ 0, & \text{sonst.} \end{cases}$$

Kapitel 2

Charakterisierung der Zustände

Es sei $(\Omega, \mathscr{F}, X, (\mathbb{P}_\pi)_{\pi\in\Pi})$ ein Standardmodell zu einer Übergangsmatrix P.

2.1 Irreduzibilität

Definition 2.1.1.

(a) Für eine Teilmenge $A \subset E$ definieren wir die Stoppzeit

$$\tau_A^0 := \inf\{n \in \mathbb{N}_0 : X_n \in A\}.$$

(b) Für einen Zustand $i \in E$ definieren wir die Stoppzeit

$$\tau_i^0 := \tau_{\{i\}}^0 = \inf\{n \in \mathbb{N}_0 : X_n = i\}.$$

Definition 2.1.2. *Es seien $i, j \in E$. Dann heißt j erreichbar von i (symbolisch $i \to j$), falls*

$$\mathbb{P}_i(\tau_j^0 < \infty) > 0.$$

Bemerkung 2.1.3. *Es gilt stets $i \to i$, denn*

$$\mathbb{P}_i(\tau_i^0 < \infty) \geq \mathbb{P}_i(\tau_i^0 = 0) = 1.$$

Satz 2.1.4. *Für alle $i, j \in E$ sind folgende Aussagen äquivalent:*

(i) Es gilt $i \to j$.

(ii) Es gilt $p_{ij}^{(n)} > 0$ für ein $n \in \mathbb{N}_0$.

Beweis. (i) ⇒ (ii): Aus der Inklusion

$$\{\tau_j^0 < \infty\} = \bigcup_{n=0}^{\infty} \{\tau_j^0 = n\} \subset \bigcup_{n=0}^{\infty} \{X_n = j\}$$

folgt

$$0 < \mathbb{P}_i(\tau_j^0 < \infty) \leq \mathbb{P}_i\bigg(\bigcup_{n=0}^{\infty} \{X_n = j\}\bigg) \leq \sum_{n=0}^{\infty} \mathbb{P}_i(X_n = j) = \sum_{n=0}^{\infty} p_{ij}^{(n)}.$$

Also existiert $n \in \mathbb{N}_0$, so dass $p_{ij}^{(n)} > 0$.

(ii) ⇒ (i): Mit der Inklusion

$$\{X_n = j\} \subset \{\tau_j^0 \leq n\} \subset \{\tau_j^0 < \infty\}$$

folgt

$$0 < p_{ij}^{(n)} = \mathbb{P}_i(X_n = j) \leq \mathbb{P}_i(\tau_j^0 < \infty).$$

Also gilt $i \to j$. □

Definition 2.1.5. *Zwei Zustände $i, j \in E$ heißen verbunden oder kommunizierend (symbolisch $i \leftrightarrow j$), falls $i \to j$ und $j \to i$.*

Lemma 2.1.6. *Verbundenheit ($\leftrightarrow$) ist eine Äquivalenzrelation auf E.*

Beweis. Reflexivität: Nach Bemerkung 2.1.3 gilt $i \leftrightarrow i$ für alle $i \in I$.
Symmetrie: Offensichtlich folgt aus $i \leftrightarrow j$ auch $j \leftrightarrow i$.
Transitivität: Es gelte $i \leftrightarrow j$ und $j \leftrightarrow k$. Nach Satz 2.1.4 existieren $n, m \in \mathbb{N}_0$, so dass $p_{ij}^{(n)} > 0$ und $p_{jk}^{(m)} > 0$. Mit Korollar 1.5.9 folgt

$$p_{ik}^{(n+m)} \geq p_{ij}^{(n)} p_{jk}^{(m)} > 0.$$

Also gilt nach Satz 2.1.4, dass $i \leftrightarrow k$. □

Definition 2.1.7. *Für einen Zustand $i \in E$ definieren wir die Äquivalenzklasse*

$$\mathscr{G}_i := \{j \in E : i \leftrightarrow j\}.$$

Dann erhalten wir die Zerlegung des Zustandsraumes

$$E = \bigcup_{i \in E/\leftrightarrow} \mathscr{G}_i.$$

Definition 2.1.8. *Eine Teilmenge $\mathscr{G} \subset E$ heißt kommunizierend, falls $i \leftrightarrow j$ für alle $i, j \in \mathscr{G}$.*

Bemerkung 2.1.9. *Die Klassen $(\mathscr{G}_i)$ aus Definition 2.1.7 sind kommunizierende Teilmengen.*

Definition 2.1.10. *Die Markov-Kette X heißt irreduzibel, falls $i \leftrightarrow j$ für alle $i, j \in E$; das heißt $\mathscr{G}_i = \mathscr{G}_j$ für alle $i, j \in E$.*

Korollar 2.1.11. *Die folgenden Aussagen sind äquivalent:*

(i) Die Markov-Kette X ist irreduzibel.

(ii) Es gilt $\sup_{n\in\mathbb{N}_0} p_{ij}^{(n)} > 0$ für alle $i, j \in E$.

Beweis. Folgt aus Satz 2.1.4. □

Wir betrachten einige Varianten von Beispiel 1.6.1.

Beispiel 2.1.12 (Markov-Kette mit zwei Zuständen)**.** *Es seien $E = \{0, 1\}$ und*

$$P = \begin{pmatrix} 1-p & p \\ q & 1-q \end{pmatrix}$$

mit $p, q \in (0, 1)$. Dann ist die Markov-Kette irreduzibel.

Beispiel 2.1.13 (Markov-Kette mit zwei Zuständen)**.** *Es seien $E = \{0, 1\}$ und*

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ q & 1-q \end{pmatrix}$$

mit $q \in [0, 1]$. Dann ist die Markov-Kette nicht irreduzibel, und der Zustandsraum zerfällt in $\mathscr{G}_0 = \{0\}$ und $\mathscr{G}_1 = \{1\}$.

Beispiel 2.1.14 (Markov-Kette mit zwei Zuständen)**.** *Es seien $E = \{0, 1\}$ und*

$$P = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ q & 1-q \end{pmatrix}$$

mit $q \in (0, 1]$. Dann ist die Markov-Kette irreduzibel.

Nun Beispiel 1.6.3.

Beispiel 2.1.15 (Irrfahrten mit reflektierenden Barrieren)**.** *Es seien* $E = \{0, 1, \ldots, N\}$ *und*

$$P = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & & & & 0 \\ 1-p & 0 & p & & & & \\ & & & \ddots & & & \\ & & & & 1-p & 0 & p \\ 0 & & & & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

mit $p \in (0, 1)$. *Dann ist die Markov-Kette irreduzibel.*

Nun Beispiel 1.6.4.

Beispiel 2.1.16 (Irrfahrt mit absorbierenden Barrieren)**.** *Es seien* $E = \{0, 1, \ldots, N\}$ *und*

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & & & & 0 \\ 1-p & 0 & p & & & & \\ & & & \ddots & & & \\ & & & & 1-p & 0 & p \\ 0 & & & & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

mit $p \in (0, 1)$. *Dann ist die Markov-Kette nicht irreduzibel, und der Zustandsraum zerfällt in* $\mathscr{G}_0 = \{0\}$, $\mathscr{G}_1 = \{1, \ldots, N-1\}$ *und* $\mathscr{G}_N = \{N\}$.

Beispiel 2.1.17. *Die Irrfahrt auf* $\mathbb{Z}$ *mit* $p \in (0, 1)$ *ist irreduzibel.*

Beispiel 2.1.18 (Symmetrische Irrfahrt)**.** *Die symmetrische Irrfahrt auf* $E = \mathbb{Z}^d$ *ist stets irreduzibel. In der Tat, seien* $i, j \in \mathbb{Z}^d$ *beliebig. Dann gilt*

- *in Beispiel 1.6.5:* $p_{ij}^{(n)} = (2d)^{-n}$, *wobei* $n = |i - j|_1$.
- *in Beispiel 1.6.6:* $p_{ij}^{(n)} = (3^d - 1)^{-n}$, *wobei* $n = |i - j|_\infty$.

Definition 2.1.19.

(a) Eine Teilmenge $\mathscr{C} \subset E$ *heißt* *abgeschlossen*, *falls*

$$\mathbb{P}_i(\tau^0_{\mathscr{C}^c} = \infty) = 1 \quad \text{für alle } i \in \mathscr{C}.$$

(b) Ein Zustand $i \in E$ *heißt* *absorbierend*, *falls* $\mathscr{C} = \{i\}$ *abgeschlossen ist; das heißt*

$$\mathbb{P}_i(\tau^0_{\{i\}^c} = \infty) = 1.$$

Satz 2.1.20. *Für eine Teilmenge $\mathscr{C} \subset E$ sind folgende Aussagen äquivalent:*

(i) $\mathscr{C}$ *ist abgeschlossen.*

(ii) Für alle $i \in \mathscr{C}$ und $j \in E$ mit $i \to j$ gilt $j \in \mathscr{C}$.

(iii) Es gilt $p_{ij}^{(n)} = 0$ für alle $i \in \mathscr{C}$, $j \in \mathscr{C}^c$ und $n \in \mathbb{N}_0$.

(iv) Es gilt $p_{ij} = 0$ für alle $i \in \mathscr{C}$ und $j \in \mathscr{C}^c$.

Beweis. (i) $\Rightarrow$ (ii): Es sei $i \in \mathscr{C}$ beliebig. Dann gilt

$$\mathbb{P}_i\bigg(\bigcap_{j \in \mathscr{C}^c} \{\tau_j^0 = \infty\}\bigg) = \mathbb{P}_i(\tau_{\mathscr{C}^c}^0 = \infty) = 1.$$

Für jedes $j \in \mathscr{C}^c$ folgt $\mathbb{P}_i(\tau_j^0 = \infty) = 1$, und damit $\mathbb{P}_i(\tau_j^0 < \infty) = 0$, das heißt $i \nrightarrow j$.

(ii) $\Rightarrow$ (iii): Es seien $i \in \mathscr{C}$ und $j \in \mathscr{C}^c$ beliebig. Dann gilt $i \nrightarrow j$. Nach Satz 2.1.4 folgt $p_{ij}^{(n)} = 0$ für alle $n \in \mathbb{N}_0$.

(iii) $\Rightarrow$ (iv): ✓

(iv) $\Rightarrow$ (i): Es sei $i \in \mathscr{C}$ beliebig. Dann gilt $\mathbb{P}_i(\tau_{\mathscr{C}^c}^0 = 0) = 0$ und

$$\mathbb{P}_i(\tau_{\mathscr{C}^c}^0 = 1) = \mathbb{P}_i(X_1 \in \mathscr{C}^c) = \sum_{j \in \mathscr{C}^c} \mathbb{P}_i(X_1 = j) = \sum_{j \in \mathscr{C}^c} p_{ij} = 0.$$

Für $n \geq 2$ gilt nach Satz 1.2.15

$$\begin{aligned}\mathbb{P}_i(\tau_{\mathscr{C}^c}^0 = n) &= \mathbb{P}_i(X_1 \in \mathscr{C}, \ldots, X_{n-1} \in \mathscr{C}, X_n \in \mathscr{C}^c) \\ &= \sum_{i_1, \ldots, i_{n-1} \in \mathscr{C}} \sum_{j \in \mathscr{C}^c} \delta_i(i_1) \cdot p_{i_1, i_2} \cdot \ldots \cdot p_{i_{n-2}, i_{n-1}} \cdot \underbrace{p_{i_{n-1}, j}}_{=0} = 0.\end{aligned}$$

Also folgt insgesamt

$$\mathbb{P}_i(\tau_{\mathscr{C}^c}^0 < \infty) = \sum_{n=0}^{\infty} \mathbb{P}_i(\tau_{\mathscr{C}^c}^0 = n) = 0.$$

□

Korollar 2.1.21. *Für einen Zustand $i \in E$ sind folgende Aussagen äquivalent:*

(i) i ist absorbierend.

(ii) Es gilt $p_{ii} = 1$.

Beweis. Folgt aus Satz 2.1.20. □

Bemerkung 2.1.22.

(a) *Eine kommunizierende Teilmenge $\mathscr{G} \subset E$ braucht nicht abgeschlossen zu sein. Siehe etwa die Irrfahrt mit absorbierenden Barrieren (Beispiel 2.1.16). Dort ist $\mathscr{G}_1 = \{1, \dots, N-1\}$ nicht abgeschlossen.*

(b) *Eine abgeschlossene Teilmenge $\mathscr{C} \subset E$ braucht nicht kommunizierend zu sein. Seien etwa $E = \{0, 1\}$ und*

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Dann ist E abgeschlossen, aber nicht kommunizierend.

Definition 2.1.23. *Es sei $i \in E$ ein Zustand.*

(a) *Der Zustand i heißt unwesentlich, falls ein $j \in E$ mit $i \to j$ und $j \nrightarrow i$ existiert.*

(b) *Der Zustand i heißt wesentlich, falls er nicht unwesentlich ist; das heißt, für alle $j \in E$ mit $i \to j$ gilt auch $j \to i$.*

Lemma 2.1.24. *Es sei $i \in E$ ein wesentlicher Zustand. Dann ist $\mathscr{G}_i$ abgeschlossen.*

Beweis. Es sei $j \in E$ mit $i \to j$ beliebig. Da i wesentlich ist, gilt auch $j \to i$. Also gilt $i \leftrightarrow j$, und damit $j \in \mathscr{G}_i$. Mit Satz 2.1.20 folgt, dass $\mathscr{G}_i$ abgeschlossen ist. □

Definition 2.1.25. *Wir bezeichnen mit $\mathscr{U}$ die Menge aller unwesentlichen Zustände.*

Satz 2.1.26. *Es gelten folgende Aussagen:*

(a) *Es existiert eine eindeutig bestimmte disjunkte Zerlegung*

$$E = \mathscr{U} \cup \left(\bigcup_{\alpha \in I} \mathscr{C}_\alpha \right)$$

mit einer höchstens abzählbaren Indexmenge I und abgeschlossenen kommunizierenden Klassen $(\mathscr{C}_\alpha)_{\alpha \in I}$.

(b) *Bei geeigneter Nummerierung der Zustände ist die Übergangsmatrix P von der Form*

$$P = \begin{pmatrix} Q_0 & Q_1 & Q_2 & Q_3 & Q_4 & \cdots \\ 0 & P_1 & 0 & 0 & 0 & \cdots \\ 0 & 0 & P_2 & 0 & 0 & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & P_3 & 0 & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \end{pmatrix}.$$

Beweis. Die $(\mathscr{C}_\alpha)$ sind gegeben durch die Äquivalenzklassen $(\mathscr{G}_i)$ mit wesentlichen Zuständen $i \in \mathscr{U}^c$. Also folgt Teil (a) mit Lemma 2.1.24, und Teil (b) mit Satz 2.1.20. □

2.2 Periodizität

Definition 2.2.1. *Die Periode eines Zustandes $i \in E$ ist definiert durch*

$$d_i := \operatorname{ggT}\{n \in \mathbb{N} : p_{ii}^{(n)} > 0\},$$

wobei wir die Konvention $\operatorname{ggT}\emptyset = \infty$ verwenden. Wir nennen den Zustand i dann d-periodisch.

Bemerkung 2.2.2. *Ein Zustand $i \in E$ mit $p_{ii}^{(n)} = 0$ für alle $n \in \mathbb{N} \setminus d\mathbb{N}$ und $p_{ii}^{(d)} > 0$ ist d-periodisch.*

Definition 2.2.3. *Ein Zustand $i \in E$ mit Periode 1 heißt aperiodisch.*

Bemerkung 2.2.4. *Gilt $p_{ii} > 0$, dann ist der Zustand i aperiodisch. Insbesondere ist ein absorbierender Zustand aperiodisch.*

Beispiel 2.2.5. *Es seien $E = \{0, 1\}$ und*

$$P = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Dann gilt $P^n = P$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Es folgt $p_{00}^{(n)} = 0$ und $p_{11}^{(n)} = 1$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Also gilt $d_0 = \infty$ und $d_1 = 1$; das heißt, der Zustand 1 ist aperiodisch.

Beispiel 2.2.6. *Wir betrachten die symmetrische Irrfahrt auf $\mathbb{Z}$. Dann gilt $d_0 = 2$, weil $p_{00}^{(2n+1)} = 0$ für alle $n \in \mathbb{N}_0$ und $p_{00}^{(2)} = \frac{1}{2}$.*

Lemma 2.2.7. *Es sei $H \subset \mathbb{N}$ abgeschlossen bezüglich Addition mit $\operatorname{ggT} H = d$ für ein $d \in \mathbb{N}$. Dann ist $d\mathbb{N} \setminus H$ endlich; das heißt H enthält bis auf endlich viele Ausnahmen alle Zahlen $d, 2d, 3d, \ldots$*

Beweis. Es existieren $k \geq 2$ und teilerfremde $n_1, \ldots, n_k \in \mathbb{N}$, so dass $n_1 d, \ldots, n_k d \in H$. Daraus folgt

$$n_1\mathbb{Z} \oplus \ldots \oplus n_k\mathbb{Z} = \operatorname{ggT}\{n_1, \ldots, n_k\}\mathbb{Z} = \mathbb{Z}.$$

Folglich existieren $z_1, \ldots, z_k \in \mathbb{Z}$ mit $\sum_{j=1}^k n_j z_j = 1$. Wir setzen $n := n_1 + \ldots + n_k \geq 2$. Dann gilt $nd \in H$, und es existiert ein $m \in \mathbb{N}$, so dass

$$m + (n-1)z_j \geq 0 \quad \text{für alle } j = 1, \ldots, k.$$

Es sei $l \geq mn$ beliebig. Dann existieren $p \in \mathbb{N}_0$ und $q \in \{0, \ldots, n-1\}$, so dass $l = (m+p)n + q$. Es folgt

$$ld = \big((m+p)n + q\big)d = pnd + \sum_{j=1}^k \underbrace{(m + qz_j)}_{\geq 0} n_j d \in H.$$

$\square$

Satz 2.2.8. *Für einen Zustand $i \in E$ und ein $d \in \mathbb{N}$ sind folgende Aussagen äquivalent:*

(i) i ist d-periodisch.

(ii) Es gilt $p_{ii}^{(n)} = 0$ für alle $n \in \mathbb{N} \setminus d\mathbb{N}$, und es existiert ein $m_0 \in \mathbb{N}$, so dass $p_{ii}^{(md)} > 0$ für alle $m \geq m_0$.

Beweis. (i) $\Rightarrow$ (ii): Wir definieren $H := \{n \in \mathbb{N} : p_{ii}^{(n)} > 0\}$. Da i Peridode d hat, gilt $\operatorname{ggT} H = d$, und damit $p_{ii}^{(n)} = 0$ für alle $n \in \mathbb{N} \setminus d\mathbb{N}$. Die Menge H ist abgeschlossen bezüglich Addition. In der Tat, es seien $n, m \in H$. Dann gilt $p_{ii}^{(n)} > 0$ und $p_{ii}^{(m)} > 0$. Nach Korollar 1.5.9 gilt

$$p_{ii}^{(n+m)} \geq p_{ii}^{(n)} p_{ii}^{(m)} > 0,$$

also $n + m \in H$. Nun folgt mit Lemma 2.2.7, dass $d\mathbb{N} \setminus H$ endlich ist. Also existiert ein $m_0 \in \mathbb{N}$, so dass $p_{ii}^{(md)} > 0$ für alle $m \geq m_0$.

(ii) $\Rightarrow$ (i): Klar, da $\operatorname{ggT} \{n \in \mathbb{N} : p_{ii}^{(n)} > 0\} = d$. □

Korollar 2.2.9. *Für einen Zustand $i \in E$ sind folgende Aussagen äquivalent:*

(i) i ist aperiodisch.

(ii) Es existiert ein $m_0 \in \mathbb{N}$, so dass $p_{ii}^{(m)} > 0$ für alle $m \geq m_0$.

Beweis. Folgt aus Satz 2.2.8. □

2.3 Rekurrenz und Transienz

Definition 2.3.1.

(a) Für eine Teilmenge $A \subset E$ definieren wir die Stoppzeit

$$\tau_A := \inf\{n \in \mathbb{N} : X_n \in A\}.$$

(b) Für einen Zustand $i \in E$ definieren wir die Stoppzeit

$$\tau_i := \tau_{\{i\}} = \inf\{n \in \mathbb{N} : X_n = i\}.$$

Wir nennen τ_A bzw. τ_i die Rückkehrzeit oder Rekurrenzzeit der Menge A bzw. des Zustandes i.

Definition 2.3.2. *Für zwei Zustände $i, j \in E$ definieren wir*

$$
\begin{aligned}
f_{ij}^{(n)} &:= \mathbb{P}_i(\tau_j = n) \in [0,1], \quad n \in \mathbb{N}, \\
f_{ij} &:= \sum_{n=1}^{\infty} f_{ij}^{(n)} = \mathbb{P}_i(\tau_j < \infty) \in [0,1], \\
\mu_{ij} &:= \mathbb{E}_i[\tau_j] \in [1, \infty].
\end{aligned}
$$

Bemerkung 2.3.3. *Für $i \neq j$ gilt $i \to j$ genau dann, wenn $f_{ij} > 0$.*

Bemerkung 2.3.4. *Für alle $i, j \in E$ gilt $f_{ij}^{(n)} \le p_{ij}^{(n)}$. In der Tat, wegen $\{\tau_j = n\} \subset \{X_n = j\}$ gilt*

$$f_{ij}^{(n)} = \mathbb{P}_i(\tau_j = n) \le \mathbb{P}_i(X_n = j) = p_{ij}^{(n)}.$$

Wir können informell anmerken:

- $p_{ij}^{(n)}$ ist die Wahrscheinlichkeit dafür, bei Start im Zustand i in n Schritten den Zustand j zu besuchen.
- $f_{ij}^{(n)}$ ist die Wahrscheinlichkeit dafür, bei Start im Zustand i in n Schritten den Zustand j erstmalig zu besuchen.
- f_{ij} ist die Wahrscheinlichkeit dafür, bei Start im Zustand i den Zustand j in Zukunft (überhaupt) zu besuchen.

Definition 2.3.5. *Ein Zustand $i \in E$ heißt*

(a) rekurrent, falls $f_{ii} = 1$.

(b) transient, falls er nicht rekurrent ist; das heißt $f_{ii} < 1$.

(c) positiv rekurrent, falls $\mu_{ii} < \infty$. (Dann ist i insbesondere rekurrent.)

(d) null-rekurrent, falls er rekurrent, aber nicht positiv rekurrent ist; das heißt $f_{ii} = 1$ und $\mu_{ii} = \infty$.

Bemerkung 2.3.6.

(a) Ist i absorbierend, dann gilt $p_{ii} = 1$, ja sogar $p_{ii}^{(n)} = 1$ für alle $n \in \mathbb{N}$ (Satz 2.1.20). Also gilt $\mathbb{P}_i$-fast sicher $\tau_i = 1$, und damit $\mu_{ii} = 1$; und folglich ist i auch positiv rekurrent.

(b) Ist i positiv rekurrent, dann ist i auch rekurrent.

(c) Gilt $d_i = \infty$, so ist $p_{ii}^{(n)} = 0$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Also gilt $f_{ii}^{(n)} = 0$ für alle $n \in \mathbb{N}$, und damit $f_{ii} = 0$. Folglich ist i transient.

Wir können also zwei Extremfälle ausmachen:

- Ein Zustand i ist genau dann absorbierend, wenn die Markov-Kette bei Start in i deterministisch verläuft, und nur noch im Zustand i bleibt; das heißt
$$\mathbb{P}_i\bigg(\bigcap_{n\in\mathbb{N}} \{X_n = i\} \bigg) = 1.$$
In diesem Fall ist i insbesondere (positiv) rekurrent.

- Ein Zustand i hat genau dann unendliche Periode, wenn die Markov-Kette bei Start in i nach dem ersten Schritt nur noch andere Zustände besucht; das heißt
$$\mathbb{P}_i\bigg(\bigcap_{n\in\mathbb{N}} \{X_n \neq i\} \bigg) = 1.$$
In diesem Fall ist i insbesondere transient.

Lemma 2.3.7. *Für alle $i, j \in E$ und $n \in \mathbb{N}$ gilt*
$$p_{ij}^{(n)} = \sum_{k=1}^{n} f_{ij}^{(k)} p_{jj}^{(n-k)}.$$

Beweis. Wir setzen
$$A := \{\tau_j < \infty\} = \{\tau_j < \infty\} \cap \{X_{\tau_j} = j\}.$$
Wir dürfen annehmen, dass $\mathbb{P}_i(A) > 0$; ansonsten sind beide Seiten gleich Null. Es sei $k \in \{1, \ldots, n\}$ beliebig. Dann gilt $\{\tau_j = k\} \subset A$ und der Prozess $(X_{\tau_j+m})_{m\in\mathbb{N}_0}$ ist nach der starken Markov-Eigenschaft (Satz 1.4.1) unter $\mathbb{P}_i^A$ eine (δ_j, P)-MK, die unabhängig von der σ-Algebra $\mathscr{F}_{\tau_j}^X$ ist. Wegen $\{\tau_j = k\} \in \mathscr{F}_{\tau_j}^X$ folgt
$$\begin{aligned}
p_{ij}^{(n)} &= \mathbb{P}_i(X_n = j) = \sum_{k=1}^{n} \mathbb{P}_i(\tau_j = k, X_{\tau_j+n-k} = j) \\
&= \sum_{\substack{k=1 \\ \mathbb{P}_i(\tau_j=k)>0}}^{n} \mathbb{P}_i(X_{\tau_j+n-k} = j \,|\, \tau_j = k) \cdot \mathbb{P}_i(\tau_j = k) \\
&= \sum_{\substack{k=1 \\ \mathbb{P}_i(\tau_j=k)>0}}^{n} \mathbb{P}_i^A(X_{\tau_j+n-k} = j \,|\, \tau_j = k) \cdot f_{ij}^{(k)} \\
&= \sum_{k=1}^{n} \mathbb{P}_j(X_{n-k} = j) \cdot f_{ij}^{(k)} = \sum_{k=1}^{n} f_{ij}^{(k)} p_{jj}^{(n-k)}.
\end{aligned}$$
□

Bemerkung 2.3.8. *Mit Hilfe von Lemma 2.3.7 können wir zeigen dass*

$$d_i = \mathrm{ggT}\{n \in \mathbb{N} : f_{ii}^{(n)} > 0\} \quad \text{für jedes } i \in E.$$

Siehe [Als16, Lemma 3.15].

Definition 2.3.9. *Für einen Zustand $i \in E$ definieren wir die monoton wachsende Folge von Stoppzeiten $(\sigma_i^n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ rekursiv durch $\sigma_i^0 := 0$ und*

$$\sigma_i^n := \inf\{k \geq \sigma_i^{n-1} + 1 : X_k = i\}, \quad n \in \mathbb{N}.$$

Definition 2.3.10. *Für einen Zustand $i \in E$ definieren wir die Folge von Zufallsvariablen $(\tau_i^n)_{n\in\mathbb{N}}$ durch*

$$\tau_i^n := (\sigma_i^n - \sigma_i^{n-1})\mathbb{1}_{\{\sigma_i^n < \infty\}} + \infty \mathbb{1}_{\{\sigma_i^n = \infty\}}, \quad n \in \mathbb{N}.$$

Bemerkung 2.3.11. *Es gilt $\tau_i = \sigma_i^1 = \tau_i^1$.*

Bemerkung 2.3.12. *Für jedes $n \in \mathbb{N}$ gilt*

$$\{\sigma_i^n < \infty\} = \{\tau_i^1 < \infty, \dots, \tau_i^n < \infty\}.$$

Insbesondere gilt $\{\sigma_i^n < \infty\} \subset \{\sigma_i^{n-1} < \infty\}$ für alle $n \in \mathbb{N}$.

$\mathbb{P}_i(\sigma_j^n < \infty)$ ist die Wahrscheinlichkeit dafür, bei Start im Zustand i den Zustand j in Zukunft (mindestens) n-mal zu besuchen.

Lemma 2.3.13. *Es seien $i, j \in E$ und $n \in \mathbb{N}$ beliebig.*

(a) Es gilt $\mathbb{P}_i(\sigma_j^n < \infty) = f_{ij} f_{jj}^{n-1}$.

(b) Insbesondere gilt $\mathbb{P}_i(\sigma_i^n < \infty) = f_{ii}^n$.

Beweis. Beweis per Induktion nach $n \in \mathbb{N}$. Der Induktionsanfang $n = 1$ ist klar. Induktionsschritt $n - 1 \to n$: Wir setzen

$$A := \{\sigma_j^{n-1} < \infty\} = \{\sigma_j^{n-1} < \infty\} \cap \{X_{\sigma_j^{n-1}} = j\}$$

Wir dürfen annehmen, dass $\mathbb{P}_i(A) > 0$; ansonsten sind beide Seiten gleich Null. Nach der starken Markov-Eigenschaft (Satz 1.4.1) ist der Prozess $(X_{\sigma_i^{n-1}+m})_{m\in\mathbb{N}_0}$ unter $\mathbb{P}_i^A$ eine (δ_j, P)-MK. Wegen

$$\sigma_j^n = \inf\{k \in \mathbb{N} : X_{\sigma_j^{n-1}+k} = j\}$$

folgt

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}_i(\sigma_j^n < \infty) &= \mathbb{P}_i(\sigma_j^n < \infty \mid \sigma_j^{n-1} < \infty) \cdot \mathbb{P}_i(\sigma_j^{n-1} < \infty) \\
&= \mathbb{P}_i^A(\sigma_j^n < \infty) \cdot f_{ij} f_{jj}^{n-2} \\
&= \mathbb{P}_j(\tau_j < \infty) \cdot f_{ij} f_{jj}^{n-2} = f_{jj} \cdot f_{ij} f_{jj}^{n-2} = f_{ij} f_{jj}^{n-1}.
\end{aligned}$$

□

Definition 2.3.14. *Für $i, j \in E$ definieren wir die momenterzeugenden Funktionen $P_{ij}, F_{ij} : (-1,1) \to \mathbb{R}_+$ durch*

$$P_{ij}(s) := \sum_{n=0}^{\infty} p_{ij}^{(n)} s^n,$$
$$F_{ij}(s) := \sum_{n=1}^{\infty} f_{ij}^{(n)} s^n.$$

Offenbar gilt $f_{ij} = \lim_{s \uparrow 1} F_{ij}(s)$. Dies folgt mit dem Abelschen Grenzwertsatz. Da die Folge $(f_{ij}^{(n)})_{n \in \mathbb{N}}$ nichtnegativ ist, können wir einen alternativen maßtheoretischen Beweis angeben. Betrachte den Maßraum $(\mathbb{N}, \mathscr{P}(\mathbb{N}), \zeta)$, wobei ζ das Zählmaß bezeichnet; das heißt $\zeta(\{n\}) = 1$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Es sei $(s_m)_{m \in \mathbb{N}} \subset (0,1)$ eine monoton wachsende Folge mit $s_m \uparrow 1$. Wir definieren die nichtnegativen messbaren Abbildungen $Z_m : \mathbb{N} \to \mathbb{R}_+$, $m \in \mathbb{N}$ und $Z : \mathbb{N} \to \mathbb{R}_+$ durch

$$Z_m(n) := f_{ij}^{(n)} s_m^n, \quad m \in \mathbb{N},$$
$$Z(n) := f_{ij}^{(n)}.$$

Dann gilt $Z_m \uparrow Z$ für $m \to \infty$. Nach dem Satz von der monotonen Konvergenz (oder auch dem Konvergenzsatz von Lebesgue) folgt

$$\int_{\mathbb{N}} Z_m d\zeta \uparrow \int_{\mathbb{N}} Z d\zeta \quad \text{für } m \to \infty,$$

und daher

$$\begin{aligned} \lim_{m\to\infty} F_{ij}(s_m) &= \lim_{m\to\infty} \sum_{n=1}^{\infty} f_{ij}^{(n)} s_m^n = \lim_{m\to\infty} \sum_{n=1}^{\infty} Z_m(n) = \lim_{m\to\infty} \int_{\mathbb{N}} Z_m d\zeta \\ &= \int_{\mathbb{N}} Z d\zeta = \sum_{n=1}^{\infty} Z(n) = \sum_{n=1}^{\infty} f_{ij}^{(n)} = f_{ij}. \end{aligned}$$

Lemma 2.3.15. *Für alle $i, j \in E$ gilt*

$$P_{ij}(s) = \delta_{ij} + F_{ij}(s) P_{jj}(s), \quad s \in (-1,1).$$

Beweis. Wir setzen $f_{ij}^{(0)} := 0$. Nach Lemma 2.3.7 gilt

$$\begin{aligned} P_{ij}(s) &= \sum_{n=0}^{\infty} p_{ij}^{(n)} s^n = p_{ij}^{(0)} + \sum_{n=1}^{\infty} p_{ij}^{(n)} s^n = \delta_{ij} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(\sum_{k=1}^{n} f_{ij}^{(k)} p_{jj}^{(n-k)} \right) s^n \\ &= \delta_{ij} + \sum_{n=0}^{\infty} \left(\sum_{k=0}^{n} f_{ij}^{(k)} p_{jj}^{(n-k)} \right) s^n = \delta_{ij} + \left(\sum_{n=0}^{\infty} f_{ij}^{(n)} s^n \right) \cdot \left(\sum_{n=0}^{\infty} p_{jj}^{(n)} s^n \right) \\ &= \delta_{ij} + F_{ij}(s) P_{jj}(s). \end{aligned}$$

□

Korollar 2.3.16. *Für alle $i \in E$ gilt*

$$P_{ii}(s) = \frac{1}{1 - F_{ii}(s)}, \quad s \in (-1, 1).$$

Beweis. Nach Lemma 2.3.15 mit $i = j$ gilt für $s \in (-1, 1)$

$$P_{ii}(s) = 1 + F_{ii}(s) P_{ii}(s).$$

Durch Umstellen folgt die behauptete Gleichung. □

Definition 2.3.17. *Für eine Folge $(A_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset \mathscr{F}$ von Ereignissen definieren wir den Limes superior durch*

$$\limsup_{n \to \infty} A_n := \bigcap_{n=1}^{\infty} \bigcup_{m \geq n} A_m.$$

Der Limes superior steht für das Ereignis, dass unendlich viele der A_n eintreten.

Satz 2.3.18. *Für einen Zustand $i \in E$ sind folgende Aussagen äquivalent:*

(i) Der Zustand i ist rekurrent; das heißt $f_{ii} = 1$.

(ii) Es gilt

$$\mathbb{P}_i\Big(\limsup_{n \to \infty} \{X_n = i\}\Big) = 1.$$

(iii) Es gilt

$$\sum_{n=0}^{\infty} p_{ii}^{(n)} = \infty.$$

Beweis. (i) $\Leftrightarrow$ (ii): Nach Lemma 2.3.13 gilt $f_{ii} = 1$ genau dann, wenn $\mathbb{P}_i(\sigma_i^n < \infty) = 1$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Da die Folge $\{\sigma_i^n < \infty\}_{n \in \mathbb{N}}$ absteigend ist, ist dies äquivalent zu

$$\mathbb{P}_i\Big(\limsup_{n \to \infty} \{X_n = i\}\Big) = \mathbb{P}_i\Big(\bigcap_{n \in \mathbb{N}} \{\sigma_i^n < \infty\}\Big) = 1.$$

(i) $\Leftrightarrow$ (iii): Nach Korollar 2.3.16 gilt

$$\sum_{n=0}^{\infty} p_{ii}^{(n)} = \lim_{s \uparrow 1} P_{ii}(s) = \lim_{s \uparrow 1} \frac{1}{1 - F_{ii}(s)} = \frac{1}{1 - f_{ii}}.$$

Also folgt die Äquivalenz wegen $f_{ii} = \lim_{s \uparrow 1} F_{ii}(s)$. □

Korollar 2.3.19. *Für einen Zustand $i \in E$ sind folgende Aussagen äquivalent:*

(i) Der Zustand i ist transient; das heißt $f_{ii} < 1$.

(ii) Es gilt

$$\sum_{n=0}^{\infty} p_{ii}^{(n)} < \infty.$$

In dem Fall gilt sogar

$$\sum_{n=0}^{\infty} p_{ji}^{(n)} < \infty \quad \text{für alle } j \in E.$$

Beweis. (i) $\Leftrightarrow$ (ii): Folgt aus Satz 2.3.18.

In diesem Fall gilt für $j \neq i$ nach Lemma 2.3.15

$$\sum_{n=0}^{\infty} p_{ji}^{(n)} = \lim_{s \uparrow 1} P_{ji}(s) = \lim_{s \uparrow 1} F_{ji}(s) P_{ii}(s) = f_{ji} \sum_{n=0}^{\infty} p_{ii}^{(n)} < \infty.$$

□

Definition 2.3.20. *Für $i \in E$ definieren wir die Anzahl der Aufenthalte der Markov-Kette im Zustand i durch*

$$N_i := \sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{1}_{\{X_n = i\}} \in \overline{\mathbb{N}}_0.$$

Bemerkung 2.3.21. *Für jeden Zustand $i \in E$ gilt*

$$\{N_i = \infty\} = \limsup_{n \to \infty} \{X_n = i\}.$$

Lemma 2.3.22. *Es seien $i, j \in E$ zwei Zustände. Für jedes $k \in \mathbb{N}_0$ gilt*

$$\mathbb{P}_j(N_i = k) = \begin{cases} 1 - f_{ji}, & \text{falls } k = 0, \\ f_{ji} f_{ii}^{k-1}(1 - f_{ii}), & \text{falls } k \geq 1. \end{cases}$$

Beweis. Für $k = 0$ gilt

$$\mathbb{P}_j(N_i = 0) = \mathbb{P}_j(\tau_i = \infty) = 1 - \mathbb{P}_j(\tau_i < \infty) = 1 - f_{ji}.$$

Nun sei $k \geq 1$ beliebig. Nach Lemma 2.3.13 gilt $\mathbb{P}_j(\sigma_i^k < \infty) = f_{ji} f_{ii}^{k-1}$. Wir unterscheiden zwei Fälle:

- Gilt $\mathbb{P}_j(\sigma_i^k < \infty) = 0$, so folgt

$$\mathbb{P}_j(N_i = k) = \mathbb{P}_j(\sigma_i^k < \infty, \tau_i^{k+1} = \infty) \leq \mathbb{P}_j(\sigma_i^k < \infty) = 0.$$

- Gilt $\mathbb{P}_j(\sigma_i^k < \infty) > 0$, so folgt mit der starken Markov-Eigenschaft (Satz 1.4.1)

$$\begin{aligned}\mathbb{P}_j(N_i = k) &= \mathbb{P}_j(\sigma_i^k < \infty, \tau_i^{k+1} = \infty) = \mathbb{P}_j(\tau_i^{k+1} = \infty \,|\, \sigma_i^k < \infty) \cdot \mathbb{P}_j(\sigma_i^k < \infty) \\ &= \mathbb{P}_i(\tau_i = \infty) \cdot f_{ji} f_{ii}^{k-1} = (1 - f_{ii}) f_{ji} f_{ii}^{k-1}.\end{aligned}$$

□

Definition 2.3.23. *Wir definieren die* <u>*Greenfunktion*</u> $g : E \times E \to [0, \infty]$ *durch*

$$g_{ij} = \mathbb{E}_i[N_j], \quad i, j \in E.$$

Lemma 2.3.24. *Für alle* $i, j \in E$ *gilt*

$$g_{ij} = \sum_{n=1}^{\infty} p_{ij}^{(n)}.$$

Beweis. Mit dem Satz von der monotonen Konvergenz gilt

$$g_{ij} = \mathbb{E}_i[N_j] = \mathbb{E}_i\left[\sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{1}_{\{X_n = j\}}\right] = \sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{P}_i(X_n = j) = \sum_{n=1}^{\infty} p_{ij}^{(n)}.$$

□

Lemma 2.3.25. *Es sei* $X : \Omega \to \mathbb{N}_0$ *eine diskrete Zufallsvariable. Dann gilt*

$$\mathbb{E}[X] = \sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{P}(X \geq n) = \sum_{n=0}^{\infty} \mathbb{P}(X > n).$$

Beweis. Wegen der unbedingten Konvergenz der Reihe gilt

$$\begin{aligned}\mathbb{E}[X] &= \sum_{j=1}^{\infty} j\mathbb{P}(X = j) = \sum_{j=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{j} \mathbb{P}(X = j) \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{j=n}^{\infty} \mathbb{P}(X = j) = \sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{P}(X \geq n).\end{aligned}$$

□

Lemma 2.3.26. *Für alle $i, j \in E$ gilt*

$$g_{ij} = \underbrace{\frac{f_{ij}}{1-f_{jj}}\mathbb{1}_{\{f_{jj}<1\}}}_{j \text{ transient}} + \underbrace{\Big(0\mathbb{1}_{\{f_{ij}=0\}} + \infty\mathbb{1}_{\{f_{ij}>0\}}\infty\Big)\mathbb{1}_{\{f_{jj}=1\}}}_{j \text{ rekurrent}}.$$

Beweis. Mit Lemmas 2.3.25, 2.3.13 und der geometrischen Reihe gilt

$$\begin{aligned} g_{ij} &= \mathbb{E}_i[N_j] = \sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{P}_i(N_j \geq n) = \sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{P}_i(\sigma_j^n < \infty) = \sum_{n=1}^{\infty} f_{ij} f_{jj}^{n-1} \\ &= \frac{f_{ij}}{1-f_{jj}}\mathbb{1}_{\{f_{jj}<1\}} + \Big(0\mathbb{1}_{\{f_{ij}=0\}} + \infty\mathbb{1}_{\{f_{ij}>0\}}\infty\Big)\mathbb{1}_{\{f_{jj}=1\}}. \end{aligned}$$

□

Satz 2.3.27. *Für einen Zustand $i \in E$ sind folgende Aussagen äquivalent:*

(i) Der Zustand i ist rekurrent; das heißt $f_{ii} = 1$.

(ii) Es gilt $\mathbb{P}_i(N_i = \infty) = 1$; mit anderen Worten

$$\mathbb{P}_i\Big(\limsup_{n\to\infty}\{X_n = i\}\Big) = 1.$$

(iii) Es gilt $g_{ii} = \infty$.

In diesem Fall gelten folgende Zusatzaussagen:

(a) Für jedes $j \in E$ gilt $\mathbb{P}_j(N_i = 0) = 1 - f_{ji}$ und $\mathbb{P}_j(N_i = \infty) = f_{ji}$.

(b) Für jedes $j \in E$ gilt

$$g_{ji} = \begin{cases} 0, & \text{falls } f_{ji} = 0, \\ \infty, & \text{falls } f_{ji} > 0. \end{cases}$$

Beweis. (i) ⇔ (ii): Folgt aus Satz 2.3.18.
(ii) ⇔ (iii): Folgt aus Satz 2.3.18 und Lemma 2.3.24.
Beweis der Zusatzaussagen:

(a) Folgt aus Lemma 2.3.22.

(b) Folgt aus Lemma 2.3.26.

□

Definition 2.3.28. *Für* $p \in (0,1]$ *bezeichnen wir mit* $\mathrm{Geo}(p)$ *die diskrete Verteilung auf* $\mathbb{N}_0$*, die durch den stochastischen Vektor*

$$\pi_k = (1-p)^k p, \quad k \in \mathbb{N}_0$$

gegeben ist, und nennen sie geometrische Verteilung mit Parameter p*.*

Bemerkung 2.3.29. *Wir beachten, dass* $\mathrm{Geo}(1) = \delta_0$*.*

Satz 2.3.30. *Für einen Zustand* $i \in E$ *sind folgende Aussagen äquivalent:*

(i) Der Zustand i *ist transient; das heißt* $f_{ii} < 1$*.*

(ii) Es gilt $\mathbb{P}_i(N_i < \infty) = 1$*; mit anderen Worten*

$$\mathbb{P}_i\Big(\limsup_{n\to\infty}\{X_n = i\}\Big) = 0.$$

(iii) Es gilt $N_i \sim \mathrm{Geo}(1 - f_{ii})$ *unter* $\mathbb{P}_i$*.*

(iv) Es gilt $g_{ii} < \infty$*.*

In diesem Fall gelten folgende Zusatzaussagen:

(a) Für jedes $j \in E$ *gilt* $\mathbb{P}_j(N_i < \infty) = 1$*.*

(b) Für jedes $j \in E$ *gilt* $g_{ji} < \infty$*.*

Beweis. (i) $\Rightarrow$ (iii): Folgt aus Lemma 2.3.22.
(iii) $\Rightarrow$ (ii): ✓
(ii) $\Rightarrow$ (iv): Wegen $\mathbb{P}_i(N_i = \infty) < 1$ folgt diese Implikation aus Satz 2.3.27.
(iv) $\Rightarrow$ (i): Folgt aus Satz 2.3.27.
Beweis der Zusatzaussagen:

(a) Nach Lemma 2.3.22 und der geometrischen Reihe gilt

$$\sum_{k=1}^{\infty} \mathbb{P}_j(N_i = k) = \sum_{k=1}^{\infty} f_{ji} f_{ii}^{k-1}(1 - f_{ii}) = f_{ji}.$$

Also folgt mit Lemma 2.3.22, dass

$$\mathbb{P}_j(N_i < \infty) = (1 - f_{ji}) + f_{ji} = 1.$$

(b) Folgt aus Korollar 2.3.19 und Lemma 2.3.24.

$\square$

Wir merken noch an, dass (iv) $\Rightarrow$ (ii) auch mit dem Lemma von Borel-Cantelli folgt. In der Tat, aus $\sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{P}_i(X_n = i) < \infty$ folgt

$$\mathbb{P}_i\Big(\limsup_{n\to\infty}\{X_n = i\}\Big) = 0.$$

Korollar 2.3.31. *Für zwei Zustände $i, j \in E$ mit $i \neq j$ sind folgende Aussagen äquivalent:*

(i) Es gilt $i \to j$.

(ii) Es gilt $f_{ij} > 0$.

(iii) Es gilt $g_{ij} > 0$.

Beweis. (i) $\Leftrightarrow$ (iii): Folgt aus Bemerkung 2.3.3.
(ii) $\Leftrightarrow$ (iii): Folgt aus Lemma 2.3.26. □

Korollar 2.3.32. *Folgende Aussagen sind äquivalent:*

(i) Die Markov-Kette ist irreduzibel.

(ii) Es gilt $f_{ij} > 0$ für alle $i, j \in E$ mit $i \neq j$.

(iii) Es gilt $g_{ij} > 0$ für alle $i, j \in E$ mit $i \neq j$.

Beweis. Folgt aus Korollar 2.3.31. □

Bemerkung 2.3.33. *Die Markov-Kette heißt schwach irreduzibel, falls $f_{ij} + f_{ji} > 0$ für alle $i, j \in E$ mit $i \neq j$.*

2.4 Zufällige Irrfahrten

Als erstes betrachten wir die Irrfahrt auf $\mathbb{Z}$; das heißt, mit einem $p \in (0,1)$ gilt $p_{i,i+1} = p$ und $p_{i,i-1} = 1 - p$ für alle $i \in \mathbb{Z}$.

Satz 2.4.1. *Für die Irrfahrt auf $\mathbb{Z}$ mit $p \in (0,1)$ sind folgende Aussagen äquivalent:*

(i) 0 ist ein rekurrenter Zustand.

(ii) Es gilt $p = \frac{1}{2}$.

Beweis. Wir setzen $q := 1 - p$. Es sei $n \in \mathbb{N}$ beliebig. Dann gilt $p_{00}^{(2n-1)} = 0$. Nach der Stirling-Formel gilt

$$n! \sim \sqrt{2\pi n}\, n^n e^{-n},$$

und daher

$$p_{00}^{(2n)} = \binom{2n}{n} p^n q^n = \frac{(2n)!}{n! \cdot n!}(pq)^n \sim \frac{\sqrt{4\pi n}(2n)^{2n}}{\sqrt{2\pi n}\, n^n \sqrt{2\pi n}\, n^n}(pq)^n = \frac{1}{\sqrt{\pi n}}(4pq)^n.$$

Es gilt $4pq = 1$ genau dann, wenn $p = \frac{1}{2}$; und andernfalls $4pq < 1$. Mit der geometrischen Reihe folgt $\sum_{n=0}^{\infty} p_{00}^{(n)} = \infty$ genau dann, wenn $p = \frac{1}{2}$. Also folgt (i) $\Leftrightarrow$ (ii) mit Satz 2.3.18. □

Also ist die 0 bei der assymetrischen Irrfahrt ein transienter Zustand. Alternativ läßt sich dies folgendermaßen zeigen.

Satz 2.4.2. *Bei der asymmetrischen ($p \neq \frac{1}{2}$) Irrfahrt auf $\mathbb{Z}$ ist 0 ein transienter Zustand.*

Beweis. Wir setzen $\mathbb{P} := \mathbb{P}_0$. Unter $\mathbb{P}$ ist der Prozess $X = (X_n)_{n \in \mathbb{N}_0}$ von der Form $X_0 = 0$ und

$$X_n = \sum_{i=1}^{n} \xi_i, \quad n \in \mathbb{N}$$

mit einer Folge $(\xi_i)_{i \in \mathbb{N}}$ von unabhängigen, identisch verteilten Zufallsvariablen, so dass $\mathbb{P}(\xi_i = 1) = p$ und $\mathbb{P}(\xi_i = -1) = 1 - p$ für alle $i \in \mathbb{N}$. Für den Erwartungswert $\mu := \mathbb{E}[\xi_1]$ gilt

$$\mu = p - (1 - p) = 2p - 1 \neq 0.$$

Nach dem starken Gesetz der großen Zahlen gilt $\mathbb{P}$-f.s.

$$\lim_{n \to \infty} \frac{X_n}{n} = \mu.$$

Also gilt $\mathbb{P}$-f.s.

$$|X_n| \to \infty \quad \text{für } n \to \infty,$$

und damit

$$\mathbb{P}\left(\limsup_{n \to \infty} \{X_n = 0\} \right) = 0.$$

Nach Satz 2.3.30 ist 0 ein transienter Zustand. □

Bemerkung 2.4.3. *Nun betrachten wir die symmtrische Irrfahrt auf $\mathbb{Z}^d$. Im Beweis von Satz 2.4.1 haben wir gesehen, dass im Fall $d = 1$ gilt*

$$p_{00}^{(2n)} \sim \frac{1}{\sqrt{\pi n}}.$$

Dies läßt vermuten, dass generell

$$p_{00}^{(2n)} \sim \frac{C_d}{n^{d/2}}$$

mit einer Konstanten $C_d > 0$, und dass 0 demnach genau dann ein rekurrenter Zustand ist, wenn $d \leq 2$.

Es sei $(\eta_m)_{m\in\mathbb{N}} \subset \mathscr{L}^2$ eine Folge von $\mathbb{Z}^d$-wertigen, unabhängigen, identisch verteilten Zufallsvariablen, die zentriert sind und eine positiv definite Kovarianzmatrix $\Sigma^2 \in \mathbb{R}^{d\times d}$ haben. Wir definieren die Folge $(Y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ durch

$$Y_n := \sum_{m=1}^{n} \eta_m, \quad n \in \mathbb{N},$$

und die Folge $(Z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ durch

$$Z_n := \frac{Y_n}{\sqrt{n}}, \quad n \in \mathbb{N}.$$

Nach dem mehrdimensionalen zentralen Grenzwertsatz gilt

$$\mathbb{P}^{Z_n} \xrightarrow{w} \mathrm{N}(0, \Sigma^2). \quad \text{(schwache Konvergenz)}$$

Im Folgenden bezeichnen wir für $\epsilon > 0$ mit $B_\epsilon \subset \mathbb{R}^d$ den Quader $B_\epsilon := (-\epsilon, \epsilon)^d$. Da die Folge $(Y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ Werte in $\mathbb{Z}^d$ hat, existiert ein $\epsilon > 0$, so dass

$$\mathbb{P}(Y_n = 0) = \mathbb{P}(Y_n \in B_\epsilon) = \mathbb{P}(Z_n \in B_{\epsilon/\sqrt{n}}) \quad \text{für alle } n \in \mathbb{N}.$$

Also gilt für große $n \in \mathbb{N}$

$$\mathbb{P}(Y_n = 0) \approx \int_{B_{\epsilon/\sqrt{n}}} f(x)dx,$$

wobei $f : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}_+$ die Dichte der $\mathrm{N}(0, \Sigma^2)$-Verteilung bezeichnet; das heißt

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{(2\pi)^d \det \Sigma^2}} \exp\Big(-\frac{1}{2}\langle \Sigma^{-2}x, x\rangle \Big).$$

Satz 2.4.4 (Version des lokalen zentralen Grenzwertsatzes)**.** *Wir nehmen an, dass ein $\epsilon > 0$ existiert, so dass*

$$\lim_{n\to\infty} n^{d/2}\left(\mathbb{P}(Y_n = 0) - \int_{B_{\epsilon/\sqrt{n}}} f(x)dx\right) = 0.$$

Dann gilt

$$n^{d/2}\mathbb{P}(Y_n = 0) \to \frac{(2\epsilon)^d}{\sqrt{(2\pi)^d \det \Sigma^2}} \quad \textit{für } n \to \infty.$$

Beweis. Wir bezeichnen mit $|B|$ das Lebesgue-Maß einer Borelmenge $B \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^d)$. Dann gilt

$$|B_{\epsilon/\sqrt{n}}| = \left(\frac{2\epsilon}{\sqrt{n}}\right)^d = \frac{(2\epsilon)^d}{n^{d/2}} \quad \text{für alle } n \in \mathbb{N}.$$

Es folgt

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty} n^{d/2}\mathbb{P}(Y_n = 0) &= \lim_{n\to\infty} n^{d/2}\int_{B_{\epsilon/\sqrt{n}}} f(x)dx = \lim_{n\to\infty} \frac{(2\epsilon)^d}{|B_{\epsilon/\sqrt{n}}|}\int_{B_{\epsilon/\sqrt{n}}} f(x)dx \\ &= (2\epsilon)^d f(0) = \frac{(2\epsilon)^d}{\sqrt{(2\pi)^d \det \Sigma^2}}.\end{aligned}$$

□

Aufgrund der resultierenden Konvergenz kann höchstens ein $\epsilon > 0$ existieren, das die Bedinging aus Satz 2.4.4 erfüllt.

Bemerkung 2.4.5. *Falls $d = 1$ und $\eta_1 \in p\mathbb{Z}$ für ein $p \in \mathbb{N}$, so kann man zeigen, dass die Voraussetzung von Satz 2.4.4 mit $\epsilon = \frac{p}{2}$ erfüllt ist. Folglich gilt dann*

$$n^{1/2}\mathbb{P}(Y_n = 0) \to \frac{p}{\sqrt{2\pi\sigma^2}}.$$

Vergleiche [Bre92, Thm. 10.17].

Satz 2.4.6. *Für die symmetrische Irrfahrt auf $\mathbb{Z}^d$ sind folgende Aussagen äquivalent:*

(i) *0 ist ein rekurrenter Zustand.*

(ii) *Es gilt $d \leq 2$.*

Beweis. Wir betrachten die symmetrische Irrfahrt aus Beispiel 1.6.5, und setzen $\mathbb{P} := \mathbb{P}_0$. Unter $\mathbb{P}$ ist der Prozess $X = (X_n)_{n \in \mathbb{N}_0}$ von der Form $X_0 = 0$ und

$$X_n = \sum_{m=1}^{n} \xi_m, \quad n \in \mathbb{N}$$

mit einer Folge $(\xi_m)_{m \in \mathbb{N}}$ von $\mathbb{R}^d$-wertigen unabhängigen, identisch verteilten Zufallsvariablen, so dass für alle $m \in \mathbb{N}$ gilt

$$\mathbb{P}(\xi_m = i) = \begin{cases} \frac{1}{2d}, & \text{falls } |i|_1 = 1, \\ 0, & \text{sonst.} \end{cases}$$

Es gilt $p_{00}^{(2n-1)} = \mathbb{P}(X_{2n-1} = 0) = 0$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Nun definieren wir die Folge $(\eta_m)_{m \in \mathbb{N}}$ von $\mathbb{R}^d$-wertigen unabhängigen, identisch verteilten Zufallsvariablen durch

$$\eta_m := \xi_{2m-1} + \xi_{2m}, \quad m \in \mathbb{N}.$$

Dann gilt

$$X_{2n} = \sum_{m=1}^{n} \eta_m, \quad n \in \mathbb{N}.$$

Wir definieren die $\mathbb{R}^d$-wertige Zufallsvariable $\eta := \eta_1$. Dann gilt

$$\mathbb{E}[\eta] = \mathbb{E}[\xi_1] + \mathbb{E}[\xi_2] = 0.$$

Nun definieren wir die $\mathbb{R}^d$-wertige Zufallsvariable $\xi := \xi_1$. Dann gilt $\mathbb{P}$-f.s. $\xi = \lambda e_i$ mit $\lambda \in \{-1, 1\}$ und $i \in \{1, \dots, d\}$. Es seien $k, l \in \{1, \dots, d\}$ mit $k \neq l$ beliebig. Dann gilt $\xi^k \xi^l = 0$, und daher

$$\operatorname{Cov}(\xi^k, \xi^l) = \mathbb{E}[\xi^k \xi^l] - \mathbb{E}[\xi^k]\mathbb{E}[\xi^l] = 0.$$

Da ξ_1 und ξ_2 unabhängig sind, folgt

$$\operatorname{Cov}(\eta^k, \eta^l) = \operatorname{Cov}(\xi_1^k + \xi_2^k, \xi_1^l + \xi_2^l) = \operatorname{Cov}(\xi_1^k, \xi_1^l) + \operatorname{Cov}(\xi_2^k, \xi_2^l) = 0.$$

Nun sei $k \in \{1, \dots, d\}$ beliebig. Dann gilt

$$\operatorname{Var}[\xi^k] = \mathbb{E}\big[|\xi^k|^2\big] = \frac{1}{2d} + \frac{1}{2d} = \frac{1}{d}.$$

Da ξ_1 und ξ_2 unabhängig sind, folgt

$$\operatorname{Var}[\eta^k] = \operatorname{Var}[\xi_1^k] + \operatorname{Var}[\xi_2^k] = \frac{2}{d}.$$

Folglich ist die $\mathbb{R}^{d\times d}$-wertige Kovarianzmatrix von η gegeben durch

$$\Sigma^2 = \operatorname{diag}\Big(\frac{2}{d}, \ldots, \frac{2}{d}\Big).$$

Also gilt $\det \Sigma^2 = (\frac{2}{d})^d$. Man kann zeigen, dass die Voraussetzung von Satz 2.4.4 mit $\epsilon = 2^{\frac{1}{d}-1}$ erfüllt ist. Folglich gilt

$$n^{d/2} p_{00}^{2n} = n^{d/2}\mathbb{P}(X_{2n} = 0) \to \frac{(2\epsilon)^d}{\sqrt{(2\pi)^d \det \Sigma^2}} = \frac{2}{(2\pi)^{d/2}(\frac{2}{d})^{d/2}} = \frac{2}{(\frac{4\pi}{d})^{d/2}}.$$

Bekanntlich gilt für $\alpha > 0$ die Äquivalenz

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^\alpha} < \infty \quad \Leftrightarrow \quad \alpha > 1.$$

Also gilt $\sum_{n=0}^{\infty} p_{00}^{(n)} < \infty$ genau dann, wenn $d > 2$, und eine Anwendung von Satz 2.3.18 beendet den Beweis. □

2.5 Zyklische Zerlegungen

Wir fixieren einen Zustand $i \in E$.

Definition 2.5.1. *Wir definieren die Zyklen (Segmente, Exkursionen) $(Z_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ der Markov-Kette durch*

$$Z_n := \begin{cases} (\tau_i^{n+1}, X_{\sigma_i^n}, \ldots, X_{\sigma_i^{n+1}-1}), & \text{falls } \sigma_i^n < \infty, \\ (\infty, \Delta, \Delta, \ldots), & \text{sonst,} \end{cases}$$

mit einem $\Delta \notin E$.

Hierbei ist τ_i^{n+1} die Länge des n-ten Zyklus, und $(X_{\sigma_i^n}, \ldots, X_{\sigma_i^{n+1}-1})$ der (möglicherweise unendlich lange) Verlauf der Markov-Kette im n-ten Zyklus. Beachte außerdem, dass $X_{\sigma_i^n} = i$ und $X_{\sigma_i^n+k} \neq i$ für alle $k = 1, \ldots, \tau_i^{n+1} - 1$.

Hat der Zyklus Z_n unendliche Länge, so hat auch der Zyklus Z_{n+1} unendliche Länge.

Definition 2.5.2. *Es gelte $f_{ii} > 0$. Für jedes $n \in \mathbb{N}$ setzen wir*

$$\widehat{\mathbb{P}}_i^{(n)} := \mathbb{P}_i^{\{\sigma_i^n < \infty\}}.$$

Bemerkung 2.5.3.

(a) *Nach Lemma 2.3.13 gilt* $\mathbb{P}_i(\sigma_i^n < \infty) = f_{ii}^n > 0$ *für alle* $n \in \mathbb{N}$.

(b) *Falls* i *rekurrent ist (das heißt* $f_{ii} = 1$*), dann gilt* $\widehat{\mathbb{P}}_i^{(n)} = \mathbb{P}_i$ *für alle* $n \in \mathbb{N}$.

Unter $\widehat{\mathbb{P}}_i^{(n)}$ sind die Zyklen $Z_0, \dots, Z_{n-1}$ von endlicher Länge.

Satz 2.5.4. *Es gelte* $f_{ii} > 0$. *Für jedes* $n \in \mathbb{N}$ *sind die Zufallsvariablen* $Z_0, \dots, Z_{n-1}$ *unter* $\widehat{\mathbb{P}}_i^{(n)}$ *unabhängig und identisch verteilt mit*

$$\widehat{\mathbb{P}}_i^{(n)} \circ Z_0 = \mathbb{P}_i^{\{\tau_i < \infty\}} \circ Z_0.$$

Beweis. Wir zeigen für alle $n \in \mathbb{N}$, dass

$$\mathbb{P}_i\left(\bigcap_{k=0}^{n-1} \{Z_k \in A_k, \tau_i^{k+1} < \infty\}\right) = \prod_{k=0}^{n-1} \mathbb{P}_i(Z_0 \in A_k, \tau_i < \infty)$$

für alle messbaren Mengen $A_0, \dots, A_{n-1}$. Wir zeigen dies per Induktion nach $n \in \mathbb{N}$. Für $n = 1$ klar. Induktionsschritt $n \to n + 1$: Wir setzen

$$A := \{\sigma_i^n < \infty\} = \{\sigma_i^n < \infty\} \cap \{X_{\sigma_i^n} = i\}.$$

Wir dürfen annehmen, dass $\mathbb{P}_i(A) > 0$; ansonsten sind beide Seiten gleich Null. Nach der starken Markov-Eigenschaft (Satz 1.4.1) ist der Prozess $(X_{\sigma_i^n + m})_{m \in \mathbb{N}_0}$ unter $\mathbb{P}_i^A$ eine (δ_i, P)-MK, die unabhängig von der σ-Algebra $\mathscr{F}_{\sigma_i^n}^X$ ist. Wegen

$$\begin{aligned} Z_k &= (\tau_i^{k+1}, X_{\sigma_i^k}, \dots, X_{\sigma_i^{k+1}-1}), \quad k = 0, \dots, n-1, \\ \tau_i^{k+1} &= (\sigma_i^{k+1} - \sigma_i^k)\mathbb{1}_{\{\sigma_i^{k+1} < \infty\}} + \infty \mathbb{1}_{\{\sigma_i^{k+1} = \infty\}}, \quad k = 0, \dots, n-1, \end{aligned}$$

sind $Z_0, \dots, Z_{n-1}$ bezüglich $\mathscr{F}_{\sigma_i^n}^X$ messbar. Wegen

$$\begin{aligned} Z_n &= (\tau_i^{n+1}, X_{\sigma_i^n}, \dots, X_{\sigma_i^{n+1}-1}), \\ \tau_i^{n+1} &= (\sigma_i^{n+1} - \sigma_i^n)\mathbb{1}_{\{\sigma_i^{n+1} < \infty\}} + \infty \mathbb{1}_{\{\sigma_i^{n+1} = \infty\}}, \\ \sigma_i^{n+1} &= \inf\{k \in \mathbb{N} : X_{\sigma_i^n + k} = i\} \end{aligned}$$

folgt

$$\begin{aligned} &\mathbb{P}_i\left(\bigcap_{k=0}^{n} \{Z_k \in A_k, \tau_i^{k+1} < \infty\}\right) = \mathbb{P}_i^A\left(\bigcap_{k=0}^{n} \{Z_k \in A_k, \tau_i^{k+1} < \infty\}\right) \cdot \mathbb{P}_i(A) \\ &= \mathbb{P}_i^A\left(\bigcap_{k=0}^{n-1} \{Z_k \in A_k, \tau_i^{k+1} < \infty\}\right) \cdot \mathbb{P}_i(Z_0 \in A_n, \tau_i < \infty) \cdot \mathbb{P}_i(A) \\ &= \mathbb{P}_i\left(\bigcap_{k=0}^{n-1} \{Z_k \in A_k, \tau_i^{k+1} < \infty\}\right) \cdot \mathbb{P}_i(Z_0 \in A_n, \tau_i < \infty) \\ &= \prod_{k=0}^{n-1} \mathbb{P}_i(Z_0 \in A_k, \tau_i < \infty) \cdot \mathbb{P}_i(Z_0 \in A_n, \tau_i < \infty) = \prod_{k=0}^{n} \mathbb{P}_i(Z_0 \in A_k, \tau_i < \infty). \end{aligned}$$

Wegen $\{\sigma_i^n < \infty\} = \{\tau_i^1 < \infty, \dots, \tau_i^n < \infty\}$ folgt nun

$$\begin{aligned}
&\widehat{\mathbb{P}}_i^{(n)}(Z_0 \in A_0, \dots, Z_{n-1} \in A_{n-1}) = \mathbb{P}_i(Z_0 \in A_0, \dots, Z_{n-1} \in A_{n-1} \,|\, \sigma_i^n < \infty) \\
&= \frac{1}{\mathbb{P}_i(\sigma_i^n < \infty)} \mathbb{P}_i\Bigg(\bigcap_{k=0}^{n-1} \{Z_k \in A_k, \tau_i^{k+1} < \infty\}\Bigg) \\
&= \frac{1}{\mathbb{P}_i(\tau_i < \infty)^n} \prod_{k=0}^{n-1} \mathbb{P}_i(Z_0 \in A_k, \tau_i < \infty) = \prod_{k=0}^{n-1} \mathbb{P}_i^{\{\tau_i < \infty\}}(Z_0 \in A_k).
\end{aligned}$$

□

Korollar 2.5.5. *Der Zustand i sei rekurrent (das heißt $f_{ii} = 1$). Dann ist $(Z_n)_{n \in \mathbb{N}_0}$ unter $\mathbb{P}_i$ eine Folge unabhäniger, identisch verteilter Zufallsvariablen.*

Beweis. Folgt aus Satz 2.5.4 und Bemerkung 2.5.3. □

Korollar 2.5.6. *Es gelte $f_{ii} > 0$. Für jedes $n \in \mathbb{N}$ sind die Zufallsvariablen $\tau_i^1, \dots, \tau_i^n$ unter $\widehat{\mathbb{P}}_i^{(n)}$ unabhängig und identisch verteilt mit Werten in $\mathbb{N}$, und es gilt*

$$\widehat{\mathbb{P}}_i^{(n)}(\tau_i^1 = k_1, \dots, \tau_i^n = k_n) = \prod_{j=1}^{n} \widehat{\mathbb{P}}_i^{(n)}(\tau_i = k_j) = \frac{1}{f_{ii}} \prod_{j=1}^{n} \mathbb{P}_i(\tau_i = k_j)$$

für alle $k_1, \dots, k_n \in \mathbb{N}$.

Beweis. Folgt aus Satz 2.5.4. □

Korollar 2.5.7. *Der Zustand i sei rekurrent (das heißt $f_{ii} = 1$). Dann ist $(\tau_i^n)_{n \in \mathbb{N}}$ unter $\mathbb{P}_i$ eine Folge unabhängiger, identisch verteilter Zufallsvariablen mit Werten in $\mathbb{N}$, und es gilt $\mathbb{P}_i \circ \tau_i^n = \mathbb{P}_i \circ \tau_i$ für alle $n \in \mathbb{N}$.*

Beweis. Folgt aus Korollar 2.5.5 und Bemerkung 2.5.3. □

Falls $f_{ii} = 0$, dann gilt $f_{ii}^{(n)} = 0$ für alle $n \in \mathbb{N}$, und mit Bemerkung 2.3.8 folgt $d_i = \infty$; das heißt

$$\mathbb{P}_i\Bigg(\bigcap_{n \in \mathbb{N}} \{X_n \neq i\}\Bigg) = 1.$$

Es gilt also $\sigma_i^1 = \infty$, und folglich ist bereits der Zyklus Z_0 von unendlicher Länge.

Die Zufallsvariable N_i zählt die Anzahl der Besuche des Zustandes i, und damit auch die Anzahl der Zyklen (endlicher Länge), und es gilt $\{\sigma_i^n < \infty\} \subset \{N_i \geq n\}$. Nach den Sätzen 2.3.27 und 2.3.30 wissen wir:

- Gilt $f_{ii} = 1$ (das heißt i ist rekurrent), dann ist $N_i = \infty$ $\mathbb{P}_i$-fast sicher. Die Zyklen $(Z_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ sind unter $\mathbb{P}_i$ unabhängig und identisch verteilt.
- Gilt $0 < f_{ii} < 1$, dann ist $N_i \sim \mathrm{Geo}(1 - f_{ii})$ unter $\mathbb{P}_i$. Die Zyklen $Z_0, \dots, Z_{n-1}$ sind unter $\widehat{\mathbb{P}}_i^{(n)}$ unabhängig und identisch verteilt.
- Gilt $f_{ii} = 0$, dann ist $N_i = 0$ $\mathbb{P}_i$-fast sicher.

2.6 Solidaritätseigenschaften

Definition 2.6.1. *Eine Eigenschaft eines Zustandes $i \in E$ heißt eine Solidaritätseigenschaft (oder Klasseneigenschaft), wenn sie für alle $j \in \mathscr{G}_i$ gilt.*

Zur Erinnerung:

$$\mathscr{G}_i := \{j \in E : i \leftrightarrow j\}.$$

Satz 2.6.2. *Rekurrenz ist eine Solidaritätseigenschaft.*

Beweis. Es seien $i, j \in E$ mit $i \leftrightarrow j$, so dass i rekurrent ist. Nach Satz 2.1.4 existieren $m, q \in \mathbb{N}$, so dass $p_{ij}^{(m)} > 0$ und $p_{ji}^{(q)} > 0$. Nach Satz 2.3.18 gilt $\sum_{n=1}^{\infty} p_{ii}^{(n)} = \infty$, und nach Korollar 1.5.9 gilt

$$p_{jj}^{(n)} \geq p_{ji}^{(q)} p_{ij}^{(n-q)} \geq p_{ji}^{(q)} p_{ii}^{(n-m-q)} p_{ij}^{(m)} \quad \text{für alle } n > m + q.$$

Also gilt

$$\sum_{n=1}^{\infty} p_{jj}^{(n)} \geq \sum_{n=m+q+1}^{\infty} p_{jj}^{(n)} \geq \sum_{n=m+q+1}^{\infty} p_{ji}^{(q)} p_{ii}^{(n-m-q)} p_{ij}^{(m)} = p_{ji}^{(q)} \left(\sum_{n=1}^{\infty} p_{ii}^{(n)} \right) p_{ij}^{(m)} = \infty.$$

Mit Satz 2.3.18 folgt, dass j rekurrent ist. □

Korollar 2.6.3. *Transienz ist eine Solidaritätseigenschaft.*

Beweis. Folgt aus Satz 2.6.2. □

Definition 2.6.4. *Die Markov-Kette heißt rekurrent bzw. transient, wenn sie irreduzibel ist, und ein (und damit jeder) Zustand rekurrent bzw. transient ist.*

Korollar 2.6.5. *Die asymmetrische Irrfahrt ($p \neq \frac{1}{2}$) auf $\mathbb{Z}$ ist transient.*

Beweis. Folgt aus Beispiel 2.1.17 (Irreduzibilität) und Satz 2.4.1 (bzw. Satz 2.4.2). □

Korollar 2.6.6 (Satz von Pólya)**.** *Folgende Aussagen sind äquivalent:*

(i) *Die symmetrische Irrfahrt auf* $\mathbb{Z}^d$ *ist rekurrent.*

(ii) *Es gilt* $d \leq 2$.

Beweis. Folgt aus Beispiel 2.1.18 (Irreduzibilität) und Satz 2.4.6. □

Satz 2.6.7. *Die Periode eines Zustandes ist eine Solidaritätseigenschaft.*

Beweis. Es seien $i, j \in E$ mit $i \leftrightarrow j$ und $i \neq j$. Bekanntlich gilt

$$\begin{aligned} d_i &= \mathrm{ggT}\{n \in \mathbb{N} : p_{ii}^{(n)} > 0\}, \\ d_j &= \mathrm{ggT}\{n \in \mathbb{N} : p_{jj}^{(n)} > 0\}. \end{aligned}$$

Nach Satz 2.1.4 existieren $m, n \in \mathbb{N}$, so dass $p_{ij}^{(m)} > 0$ und $p_{ji}^{(n)} > 0$. Wir setzen

$$\mathcal{D}_j := \{l \in \mathbb{N} : p_{jj}^{(l)} > 0\}$$

Nach Korollar 1.5.9 gilt

$$p_{ii}^{(m+k+n)} \geq p_{ij}^{(m)} p_{ji}^{(k+n)} \geq p_{ij}^{(m)} p_{jj}^{(k)} p_{ji}^{(n)} > 0 \quad \text{für alle } k \in \mathcal{D}_j \cup \{0\}.$$

Aus $p_{ii}^{(m+n)} > 0$ folgt $m + n = \lambda_0 d_i$ für ein $\lambda_0 \in \mathbb{N}$, und aus $p_{ii}^{(m+n+k)} > 0$ für $k \in \mathcal{D}_j$ folgt $m + n + k = \lambda_k d_i$ für ein $\lambda_k \in \mathbb{N}$. Nun folgt $k = (\lambda_k - \lambda_0) d_i$, woraus $\mathcal{D}_j \subset d_i \mathbb{N}$ folgt. Also gilt $d_i \leq d_j$. Die Ungleichung $d_j \leq d_i$ beweisen wir analog. □

Definition 2.6.8. *Die Markov-Kette heißt* aperiodisch *bzw.* d-periodisch *für ein* $d \geq 2$*, wenn sie irreduzibel ist, und ein (und damit jeder) Zustand aperiodisch bzw.* d-*periodisch ist.*

Satz 2.6.9. *Es sei* $i \in E$ *ein rekurrenter Zustand. Weiterhin sei* $j \in E$ *ein Zustand mit* $j \neq i$ *und* $i \to j$. *Dann gelten folgende Aussagen.*

(a) *Es gilt* $i \leftrightarrow j$.

(b) *Der Zustand* j *ist rekurrent.*

(c) *Es gilt* $f_{ij} = f_{ji} = 1$.

Beweis.

(a) Es gilt $f_{ii} = 1$ und $i \to j$. Nach Satz 2.1.4 gibt es ein minimales $n \in \mathbb{N}$, so dass $p_{ij}^{(n)} > 0$. Also gilt $\mathbb{P}_i(X_n = j) > 0$ und

$$\mathbb{P}_i(X_1 \neq i, \ldots, X_{n-1} \neq i \mid X_n = j) = 1.$$

In der Tat, falls

$$\mathbb{P}_i(X_1 \neq i, \dots, X_{n-1} \neq i \,|\, X_n = j) < 1,$$

dann gilt

$$\mathbb{P}_i\bigg(\bigcup_{k=1}^{n-1}\{X_k = i\} \,\bigg|\, X_n = j\bigg) > 0,$$

und folglich existiert ein $k \in \{1, \dots, n-1\}$ mit $\mathbb{P}_i(X_k = i \,|\, X_n = j) > 0$. Nach Satz 1.2.15 gilt

$$\begin{aligned} &p_{ii}^{(k)} \cdot p_{ij}^{(n-k)} = \mathbb{P}_i(X_k = i, X_n = j) = \mathbb{P}_i(X_k = i \,|\, X_n = j) \cdot \mathbb{P}_i(X_n = j) \\ &= \mathbb{P}_i(X_k = i \,|\, X_n = j) \cdot p_{ij}^{(n)} > 0. \end{aligned}$$

Also folgt $p_{ii}^{(k)} > 0$ und $p_{ij}^{(n-k)} > 0$. Letzteres ist ein Widerspruch zur Minimalität von n. Nun erhalten wir

$$\begin{aligned} p_{ij}^{(n)} &= \mathbb{P}_i(X_1 \neq i, \dots, X_{n-1} \neq i \,|\, X_n = j) \cdot \mathbb{P}_i(X_n = j) \\ &= \mathbb{P}_i(X_1 \neq i, \dots, X_{n-1} \neq i, X_n = j). \end{aligned}$$

Wir definieren die Stoppzeit

$$\varrho_i := \inf\{m \geq n+1 : X_m = i\}.$$

Mit der Markov-Eigenschaft (Satz 1.2.16) folgt

$$\begin{aligned} &0 = 1 - f_{ii} = \mathbb{P}_i(\tau_i = \infty) \geq \mathbb{P}_i(X_1 \neq i, \dots, X_{n-1} \neq i, X_n = j, \tau_i = \infty) \\ &= \mathbb{P}_i(X_1 \neq i, \dots, X_{n-1} \neq i, X_n = j, \varrho_i = \infty) \\ &= \mathbb{P}_i(X_1 \neq i, \dots, X_{n-1} \neq i, \varrho_i = \infty \,|\, X_n = j) \cdot \mathbb{P}_i(X_n = j) \\ &= \mathbb{P}_i(X_1 \neq i, \dots, X_{n-1} \neq i \,|\, X_n = j) \cdot \mathbb{P}_i(\varrho_i = \infty \,|\, X_n = j) \cdot \mathbb{P}_i(X_n = j) \\ &= \mathbb{P}_i(X_1 \neq i, \dots, X_{n-1} \neq i, X_n = j) \cdot \mathbb{P}_j(\tau_i = \infty) = p_{ij}^{(n)} \cdot (1 - f_{ji}). \end{aligned}$$

Also folgt $f_{ji} = 1$, und insbesondere $j \to i$.

(b) Folgt aus Satz 2.6.2.

(c) Folgt nun aus dem Beweis von Teil (a).

□

Satz 2.6.9 zeigt, dass aus $f_{ii} = 1$ (das heißt i ist rekurrent) und $i \to j$ bereits $f_{ji} = 1$ (und damit insbesondere $j \to i$) folgt. Die Hauptideen des Beweises sind gewesen:

(1) Mit Hilfe der der Markov-Eigenschaft zeigen wir

$$p_{ij}^{(n)} \cdot \mathbb{P}_j(\tau_i = \infty) = \mathbb{P}_i(X_1 \neq i, \ldots, X_{n-1} \neq i, X_n = j, \varrho_i = \infty).$$

(2) Wir überlegen uns

$$\{X_1 \neq i, \ldots, X_{n-1} \neq i, X_n = j, \varrho_i = \infty\} \subset \{\tau_i = \infty\}.$$

(3) Folglich gilt $\mathbb{P}_j(\tau_i = \infty) = 0$.

Korollar 2.6.10. *Ein rekurrenter Zustand i ist auch wesentlich; das heißt, für alle $j \in E$ mit $i \to j$ gilt auch $j \to i$. Insbesondere ist ein unwesentlicher Zustand i auch transient.*

Beweis. Folgt aus Satz 2.6.9. □

Bemerkung 2.6.11. *Bei der Zerlegung*

$$E = \mathscr{U} \cup \left(\bigcup_{\alpha \in I} \mathscr{C}_\alpha \right)$$

aus Satz 2.1.26 besteht $\mathscr{U}$ also aus allen transienten Zuständen, und die abgeschlossenen Klassen $(\mathscr{C}_\alpha)$ sind gegeben durch die $(\mathscr{G}_i)$ mit rekurrenten Zuständen i.

Korollar 2.6.12. *Es sei $i, j \in E$ zwei Zustände, so dass i rekurrent ist. Dann gilt*

$$f_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{falls } j \in \mathscr{G}_i, \\ 0, & \text{sonst.} \end{cases}$$

Beweis. Falls $j \in \mathscr{G}_i$, so folgt $f_{ij} = 1$ aus Satz 2.6.9. Nun gelte $j \in \mathscr{G}_i^c$. Nach Korollar 2.6.10 und Lemma 2.1.24 ist $\mathscr{G}_i$ abgeschlossen. Mit Bemerkung 2.3.4 und Satz 2.1.20 folgt

$$f_{ij} = \sum_{n=1}^{\infty} f_{ij}^{(n)} \leq \sum_{n=1}^{\infty} p_{ij}^{(n)} = 0.$$

□

Bemerkung 2.6.13. *Es kann passieren, dass es nur transiente Zustände gibt; beispielsweise für $E = \mathbb{N}_0$ und $p_{i,i+1} = 1$ für alle $i \in \mathbb{N}_0$. Wir werden nun sehen, dass dies mit einem endlichen Zustandsraum nicht möglich ist.*

Satz 2.6.14. *Der Zustandsraum E sei endlich. Dann gelten folgende Aussagen:*

(a) Die Markov-Kette besitzt mindestens einen rekurrenten Zustand.

(b) Jeder rekurrente Zustand ist bereits positiv rekurrent.

Beweis.

(a) Angenommen, alle Zustände sind transient. Nach Satz 2.3.30 gilt $g_{ij} < \infty$ für alle $i, j \in E$. Nun sei $i \in E$ beliebig. Da E endlich ist, folgt der Widerspruch

$$\infty = \mathbb{E}_i\left[\sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{1}_{\{X_n \in E\}}\right] = \sum_{j \in E} \mathbb{E}_i\left[\sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{1}_{\{X_n = j\}}\right] = \sum_{j \in E} \mathbb{E}_i[N_j] = \sum_{j \in E} g_{ij} < \infty.$$

(b) Es sei $i \in E$ ein rekurrenter Zustand. Es gilt $i \leftrightarrow j$ für alle $j \in \mathscr{G}_i$. Also existiert nach Satz 2.1.4 eine Funktion $\phi : \mathscr{G}_i \to \mathbb{N}$, so dass

$$p_{ji}^{(\phi(j))} > 0 \quad \text{für alle } j \in \mathscr{G}_i.$$

Wir setzen

$$m := \max_{j \in \mathscr{G}_i} \phi(j) \quad \text{und} \quad \beta := \min_{j \in \mathscr{G}_i} p_{ji}^{(\phi(j))}.$$

Da E endlich ist, gilt $m < \infty$ und $\beta > 0$. Wir definieren die Folge von endlichen Stoppzeiten $(\nu_n)_{n \in \mathbb{N}}$ rekursiv durch $\nu_1 := \phi(i)$ und

$$\nu_n := \nu_{n-1} + \phi(X_{\nu_{n-1}}), \quad n \geq 2.$$

Dann ist die Folge $(\nu_n)_{n \in \mathbb{N}}$ wohldefiniert; das heißt, es gilt $\mathbb{P}_i(X_{\nu_{n-1}} \in \mathscr{G}_i) = 1$ für alle $n \geq 2$. Beweis per Induktion nach n:

- Induktionsanfang $n = 2$: Nach Satz 2.1.20 gilt

$$\mathbb{P}_i(X_{\nu_1} \in \mathscr{G}_i) = \mathbb{P}_i(X_{\phi(i)} \in \mathscr{G}_i) = \sum_{j \in \mathscr{G}_i} \mathbb{P}_i(X_{\phi(i)} = j) = \sum_{j \in \mathscr{G}_i} p_{ij}^{(\phi(i))} = 1.$$

- Induktionsschritt $n \to n+1$: Mit der starken Markov-Eigenschaft (Satz 1.4.1), Satz 2.1.20 und der Induktionsvoraussetzung gilt

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}_i(X_{\nu_n} \in \mathscr{G}_i) &= \sum_{j \in \mathscr{G}_i} \mathbb{P}_i(X_{\nu_{n-1}} = j, X_{\nu_{n-1}+\phi(j)} \in \mathscr{G}_i) \\
&= \sum_{j \in \mathscr{G}_i} \sum_{k \in \mathscr{G}_i} \mathbb{P}_i(X_{\nu_{n-1}} = j, X_{\nu_{n-1}+\phi(j)} = k) \\
&= \sum_{\substack{j \in \mathscr{G}_i \\ \mathbb{P}_i(X_{\nu_{n-1}} = j) > 0}} \sum_{k \in \mathscr{G}_i} \mathbb{P}_i(X_{\nu_{n-1}+\phi(j)} = k \mid X_{\nu_{n-1}} = j) \cdot \mathbb{P}_i(X_{\nu_{n-1}} = j) \\
&= \sum_{\substack{j \in \mathscr{G}_i \\ \mathbb{P}_i(X_{\nu_{n-1}} = j) > 0}} \underbrace{\left(\sum_{k \in \mathscr{G}_i} p_{jk}^{(\phi(j))}\right)}_{=1} \mathbb{P}_i(X_{\nu_{n-1}} = j) \\
&= \mathbb{P}_i(X_{\nu_{n-1}} \in \mathscr{G}_i) = 1.
\end{aligned}$$

Nun sei $n \in \mathbb{N}$ beliebig. Dann gilt $\nu_n \le nm$. Für jedes $j \in \mathscr{G}_i \setminus \{i\}$ setzen wir

$$A_j := \{\nu_{n-1} < \infty\} \cap \{X_{\nu_{n-1}} = j\} = \{X_{\nu_{n-1}} = j\}.$$

Falls $\mathbb{P}_i(A_j) > 0$, dann ist $(X_{\nu_{n-1}+m})_{m\in\mathbb{N}_0}$ nach der starken Markov-Eigenschaft (Satz 1.4.1) eine (δ_j, P)-MK, die unabhängig von der σ-Algebra $\mathscr{F}^X_{\nu_{n-1}}$ ist. Es folgt mit Satz 2.1.20

$$\begin{aligned}
&\mathbb{P}_i(\tau_i > nm) \le \mathbb{P}_i(\tau_i > \nu_n) \le \mathbb{P}_i(X_{\nu_1} \ne i, \dots, X_{\nu_{n-1}} \ne i, X_{\nu_n} \ne i)\\
&= \sum_{j\in\mathscr{G}_i\setminus\{i\}} \mathbb{P}_i(X_{\nu_1} \ne i, \dots, X_{\nu_{n-2}} \ne i, X_{\nu_{n-1}} = j, X_{\nu_{n-1}+\phi(j)} \ne i)\\
&= \sum_{\substack{j\in\mathscr{G}_i\setminus\{i\}\\ \mathbb{P}_i(A_j)>0}} \mathbb{P}_i(X_{\nu_1} \ne i, \dots, X_{\nu_{n-2}} \ne i, X_{\nu_{n-1}} = j, X_{\nu_{n-1}+\phi(j)} \ne i \,|\, X_{\nu_{n-1}} = j)\\
&\qquad \cdot \mathbb{P}_i(X_{\nu_{n-1}} = j)\\
&= \sum_{\substack{j\in\mathscr{G}_i\setminus\{i\}\\ \mathbb{P}_i(A_j)>0}} \mathbb{P}_i(X_{\nu_1} \ne i, \dots, X_{\nu_{n-2}} \ne i, X_{\nu_{n-1}} = j \,|\, X_{\nu_{n-1}} = j)\\
&\qquad \cdot \mathbb{P}_j(X_{\phi(j)} \ne i) \cdot \mathbb{P}_i(X_{\nu_{n-1}} = j)\\
&= \sum_{j\in\mathscr{G}_i\setminus\{i\}} \mathbb{P}_i(X_{\nu_1} \ne i, \dots, X_{\nu_{n-2}} \ne i, X_{\nu_{n-1}} = j)\, \underbrace{(1 - p_{ji}^{(\phi(j))})}_{\le 1-\beta}\\
&\le (1-\beta)\mathbb{P}_i(X_{\nu_1} \ne i, \dots, X_{\nu_{n-1}} \ne i) \le \dots \le (1-\beta)^n.
\end{aligned}$$

Da $1 - \beta \in [0, 1)$, folgt nun mit Lemma 2.3.25 und der geometrischen Reihe

$$\begin{aligned}
\frac{\mu_{ii}}{m} &= \frac{1}{m}\mathbb{E}_i[\tau_i] = \frac{1}{m}\sum_{n=0}^{\infty} \mathbb{P}_i(\tau_i > n) = \frac{1}{m}\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{k=0}^{m-1} \underbrace{\mathbb{P}_i(\tau_i > mn + k)}_{\le \mathbb{P}_i(\tau_i > nm)}\\
&\le \sum_{n=0}^{\infty} \mathbb{P}_i(\tau_i > nm) \le \sum_{n=0}^{\infty}(1-\beta)^n < \infty,
\end{aligned}$$

und daher $\mu_{ii} < \infty$.

□

Fassen wir die wesentlichen Ideen für den Beweis von Satz 2.6.14(b) kurz zusammen:

(1) Für einen rekurrenten Zustand i führen wir ein:

- m ist die maximale Anzahl an Schritten, um mit positiver Wahrscheinlichkeit von einem beliebigen Zustand aus $\mathscr{G}_i$ wieder in i zu landen.

- β ist die minimale zugehörige Übergangswahrscheinlichkeit.

Da E endlich ist, gilt $m < \infty$ und $\beta > 0$.

(2) Wegen der geometrischen Reihe gilt

$$\frac{\mathbb{E}[\tau_i]}{m} \leq \sum_{n=0}^{\infty} \mathbb{P}_i(\tau_i > nm) \leq \sum_{n=0}^{\infty} (1-\beta)^n < \infty.$$

Lemma 2.6.15. *Es sei $i \in E$ ein rekurrenter Zustand. Weiterhin sei $j \in E$ ein Zustand mit $j \neq i$ und $i \to j$. Wir setzen*

$$\nu := \sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{1}_{\{X_n = i\} \cap \{\tau_j > n\}} = \sum_{n=1}^{\tau_j - 1} \mathbb{1}_{\{X_n = i\}} \quad \textit{und} \quad p := \mathbb{P}_i(\tau_j < \tau_i).$$

Dann gelten folgende Aussagen:

(a) Es gilt $p > 0$.

(b) Es gilt $\nu \sim \mathrm{Geo}(p)$ unter $\mathbb{P}_i$.

Bemerkung: Die Zufallsvariable ν zählt die Anzahl der Besuche des Zustandes i, bevor der Zustand j das erste Mal erreicht wird.

Beweis. Wir setzen

$$F := \bigcup_{n \in \mathbb{N}} \{(n, i_1, \ldots, i_n) \in \mathbb{N} \times E^n : i_k \neq j \text{ für alle } k = 1, \ldots, n\},$$
$$G := \bigcup_{n \in \mathbb{N}} \{(n, i_1, \ldots, i_n) \in \mathbb{N} \times E^n : i_k = j \text{ für ein } k = 1, \ldots, n\}.$$

Nach Korollar 2.5.5 gilt für jedes $k \in \mathbb{N}_0$

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}_i(\nu = k) &= \mathbb{P}_i(\sigma_i^k < \tau_j < \sigma_i^{k+1}) \\
&= \mathbb{P}_i(Z_0 \in F, \ldots, Z_{k-1} \in F, Z_k \in G) \\
&= \mathbb{P}_i(Z_0 \in F) \cdot \ldots \cdot \mathbb{P}(Z_{k-1} \in F) \cdot \mathbb{P}_i(Z_k \in G) \\
&= \mathbb{P}_i(Z_0 \in F)^k \cdot \mathbb{P}_i(Z_0 \in G) \\
&= \mathbb{P}_i(\tau_i < \tau_j)^k \cdot \mathbb{P}_i(\tau_j < \tau_i) = (1-p)^k p.
\end{aligned}$$

Nach Satz 2.6.9 gilt $\mathbb{P}_i(\tau_j < \infty) = f_{ij} = 1$, und damit

$$\nu = \sum_{n=1}^{\tau_j - 1} \mathbb{1}_{\{X_n = i\}} < \infty \quad \mathbb{P}_i\text{-fast sicher.}$$

Nun folgt $p > 0$, und damit auch $\nu \sim \mathrm{Geo}(p)$ unter $\mathbb{P}_i$. $\square$

Lemma 2.6.16 (Starke Markov-Eigenschaft für rekurrente Zustände)**.** *Es seien $i, j \in E$ zwei Zustände mit $i \leftrightarrow j$, so dass i rekurrent ist. Für jedes $n \in \mathbb{N}$ ist der Prozess $(X_{\sigma_i^n + m})_{m \in \mathbb{N}}$ unter $\mathbb{P}_j$ eine (δ_i, P)-MK, die von der σ-Algebra $\mathscr{F}^X_{\sigma_i^n}$ unabhängig ist.*

Beweis. Nach Satz 2.6.9 gilt $f_{ji} = 1$. Mit Lemma 2.3.13(a) folgt

$$\mathbb{P}_j(\sigma_i^n < \infty) = f_{ji} f_{ii}^{n-1} = 1,$$

und daher $\mathbb{P}_j = \mathbb{P}_j^{\{\sigma_i^n < \infty\}}$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Außerdem gilt

$$\{\sigma_i^n < \infty\} = \{\sigma_i^n < \infty\} \cap \{X_{\sigma_i^n} = i\} \quad \text{für alle } n \in \mathbb{N}.$$

Also folgt die Aussage aus Satz 1.4.1. □

Satz 2.6.17. *Positive Rekurrenz ist eine Solidaritätseigenschaft.*

Beweis. Es seien $i, j \in E$ mit $i \leftrightarrow j$, so dass i positiv rekurrent ist; das heißt $\mu_{ii} < \infty$. Wir setzen

$$\begin{aligned} \widehat{\tau}_i &:= \inf\{n \in \mathbb{N} : X_{\tau_j + n} = i\}, \\ \widehat{\tau}_j &:= \inf\{n \in \mathbb{N} : X_{\tau_i + n} = j\}. \end{aligned}$$

Wegen $\tau_i = \sigma_i^1$ gilt mit der starken Markov-Eigenschaft (Lemma 2.6.16)

$$\mathbb{E}_j[\widehat{\tau}_j] = \mathbb{E}_j[\mathbb{E}_j[\widehat{\tau}_j \mid X_{\tau_i}]] = \mathbb{E}_i[\tau_j] = \mu_{ij}.$$

Wegen $\tau_j \leq \tau_i + \widehat{\tau}_j$ folgt

$$\mu_{jj} = \mathbb{E}_j[\tau_j] \leq \mathbb{E}_j[\tau_i] + \mathbb{E}_j[\widehat{\tau}_j] = \mu_{ji} + \mu_{ij}.$$

Also reicht es, zu zeigen, dass $\mu_{ij} < \infty$ und $\mu_{ji} < \infty$. Nach Lemma 2.6.15 gilt $p > 0$, wobei $p := \mathbb{P}_i(\tau_j < \tau_i)$, und es gilt $\nu \sim \mathrm{Geo}(p)$ unter $\mathbb{P}_i$, und folglich

$$\mathbb{E}_i[\nu + 1] = \frac{1-p}{p} + 1 = \frac{1}{p}.$$

Weiterhin gilt

$$\tau_j \leq \sigma_i^{\nu+1} = \sum_{k=1}^{\nu+1} \tau_i^k.$$

Nun sei $k \in \mathbb{N}$ beliebig. Dann gilt

$$\{\nu \geq k-1\} = \{\sigma_i^{k-1} < \tau_j\} \in \mathscr{F}^X_{\sigma_i^{k-1}}.$$

Weiterhin gilt

$$\tau_i^k = \sigma_i^k - \sigma_i^{k-1} = \inf\{n \in \mathbb{N} : X_{\sigma_i^{k-1}+n} = i\}.$$

Nach der starken Markov-Eigenschaft (Lemma 2.6.16) sind $\{\nu \geq k-1\}$ und τ_i^k unter $\mathbb{P}_i$ unabhängig. Also folgt mit Korollar 2.5.7 und Lemma 2.3.25

$$\begin{aligned}
\mu_{ij} = \mathbb{E}_i[\tau_j] \leq \mathbb{E}_i[\sigma_i^{\nu+1}] &= \mathbb{E}_i\left[\sum_{k=1}^{\nu+1} \tau_i^k\right] = \mathbb{E}_i\left[\sum_{k=1}^{\infty} \tau_i^k \mathbb{1}_{\{\nu+1\geq k\}}\right] \\
&= \sum_{k=1}^{\infty} \mathbb{E}_i[\tau_i^k]\mathbb{P}_i(\nu \geq k-1) \\
&= \mathbb{E}_i[\tau_i] \sum_{k=1}^{\infty} \mathbb{P}_i(\nu+1 \geq k) = \mathbb{E}_i[\tau_i]\mathbb{E}_i[\nu+1] = \frac{\mu_{ii}}{p} < \infty.
\end{aligned}$$

Für jedes $k \in \mathbb{N}$ gilt wegen der Definition von ν

$$\begin{aligned}
\sigma_i^{\nu+1} - \tau_j &= \inf\{m \in \mathbb{N} : X_{\tau_j+m} = i\}, \\
\tau_i &= \inf\{m \in \mathbb{N} : X_m = i\}.
\end{aligned}$$

Wegen $\tau_j = \sigma_j^1$ folgt mit der starken Markov-Eigenschaft (Lemma 2.6.16)

$$\mathbb{P}_i \circ (\sigma_i^{\nu+1} - \tau_j) = \mathbb{P}_j \circ \tau_i,$$

und daher mit der Rechnung von oben

$$\mu_{ji} = \mathbb{E}_j[\tau_i] = \mathbb{E}_i[\sigma_i^{\nu+1} - \tau_j] = \mathbb{E}_i[\sigma_i^{\nu+1}] - \mu_{ij} < \infty.$$

□

Bemerkung 2.6.18. *Falls E endlich ist, dann folgt Satz 2.6.17 auch direkt aus den Sätzen 2.6.2 und 2.6.14(b).*

Korollar 2.6.19. *Null-Rekurrenz ist eine Solidaritätseigenschaft.*

Beweis. Folgt aus Satz 2.6.17. □

Definition 2.6.20. *Die Markov-Kette heißt positiv rekurrent bzw. null-rekurrent, wenn sie irreduzibel ist, und ein (und damit jeder) Zustand positiv rekurrent bzw. nullrekurrent ist.*

Korollar 2.6.21. *Jede irreduzible Markov-Kette mit endlichem Zustandsraum ist positiv rekurrent.*

Beweis. Folgt aus Satz 2.6.14. □

Kapitel 3

Ergodensatz für positiv rekurrente Markov-Ketten

Wir erinnern an das Standardmodell einer Markov-Kette

$$(\Omega, \mathscr{F}, X, (\mathbb{P}_\pi)_{\pi \in \Pi})$$

zu einer Übergangsmatrix P auf dem Zustandsraum E.

3.1 Stationäre Verteilungen

Definition 3.1.1. *Ein stochastischer Vektor $\pi : E \to [0,1]$ heißt eine stationäre Verteilung, falls*

$$\pi = \pi P,$$

das heißt

$$\pi_j = \sum_{i \in E} \pi_i p_{ij} \quad \textit{für alle } j \in E.$$

Lemma 3.1.2. *Es sei π eine stationäre Verteilung.*

(a) Es gilt $\pi = \pi P^n$ für alle $n \in \mathbb{N}$.

(b) Es gilt $\mathbb{P}_\pi \circ X_n = \pi$ für alle $n \in \mathbb{N}$.

Beweis.

(a) ✓

(b) Folgt nun aus Satz 1.2.15.

□

Definition 3.1.3. *Ein nichtnegativer Vektor $\pi : E \to \mathbb{R}_+$ mit $\pi \neq 0$ heißt ein invariantes Maß, falls*

$$\pi = \pi P.$$

Definition 3.1.4. *Für alle $i, j \in E$ definieren wir*

$$\nu_{ij} = \sum_{n=0}^{\tau_i - 1} \mathbb{1}_{\{X_n = j\}} \in \overline{\mathbb{N}}_0.$$

Bemerkung 3.1.5.

(a) Die Zufallsvariable ν_{ij} zählt die Anzahl der Besuche des Zustandes j – hier ab dem Zeitpunkt 0 – bevor der Zustand i das erste Mal erreicht wird.

(b) Für jedes $i \in E$ gilt $\nu_{ii} = 1$ $\mathbb{P}_i$-fast sicher.

(c) Ist i rekurrent, so gilt $\tau_i < \infty$ $\mathbb{P}_i$-fast sicher, und daher $\nu_{ij} < \infty$ $\mathbb{P}_i$-fast sicher.

(d) In dem Fall ist ν_{ij} die Aufenthaltsdauer im Zustand j relativ zur Zykluslänge τ_i.

Lemma 3.1.6. *Es sei $i \in E$ ein rekurrenter Zustand.*

(a) Für jedes $j \in \mathscr{G}_i^c$ gilt $\nu_{ij} = 0$ $\mathbb{P}_i$-fast sicher.

(b) Für jedes $j \in E$ gilt $\mathbb{E}_i[\nu_{ij}] < \infty$.

Beweis.

(a) Wegen Satz 2.1.20 gilt

$$\mathbb{P}_i(\nu_{ij} > 0) \leq \mathbb{P}_i\Bigg(\bigcup_{n \in \mathbb{N}_0} \{X_n = j\}\Bigg) \leq \sum_{n=0}^{\infty} \mathbb{P}_i(X_n = j) = \sum_{n=0}^{\infty} p_{ij}^{(n)} = 0.$$

(b) Es sei $j \in E$ beliebig. Wegen Teil (a) dürfen wir annehmen, dass $j \in \mathscr{G}_i$. Wegen Bemerkung 3.1.5(b) dürfen wir außderdem annehmen, dass $j \neq i$. Da $\tau_j = \sigma_j^1$, gilt mit der starken Markov-Eigenschaft für rekurrente Zustände (Lemma 2.6.16) für jedes $n \in \mathbb{N}$

$$\begin{aligned}\mathbb{P}_i(\nu_{ij} \geq n) &= \mathbb{P}_i(\sigma_j^n < \tau_i) = \mathbb{P}_i(\tau_j < \tau_i, \sigma_j^n < \tau_i) = \mathbb{P}_i(\tau_j < \tau_i)\mathbb{P}_j(\sigma_j^{n-1} < \tau_i) \\ &= \ldots = \mathbb{P}_i(\tau_j < \tau_i)\mathbb{P}_j(\tau_j < \tau_i)^{n-1}.\end{aligned}$$

Nach Lemma 2.6.15 gilt $\mathbb{P}_i(\tau_j < \tau_i) > 0$. Da $\nu_{ij} < \infty$ $\mathbb{P}_i$-fast sicher, gilt

$$\lim_{n\to\infty} \mathbb{P}_i(\nu_{ij} \geq n) = 0,$$

und daher $\mathbb{P}_j(\tau_j < \tau_i) < 1$. Nun folgt mit Lemma 2.3.25 und der geometrischen Reihe

$$\begin{aligned}\mathbb{E}_i[\nu_{ij}] &= \sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{P}_i(\nu_{ij} \geq n) = \sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{P}_i(\tau_j < \tau_i)\mathbb{P}_j(\tau_j < \tau_i)^{n-1} \\ &= \frac{\mathbb{P}_i(\tau_j < \tau_i)}{1 - \mathbb{P}_j(\tau_j < \tau_i)} = \frac{\mathbb{P}_i(\tau_j < \tau_i)}{\mathbb{P}_j(\tau_i < \tau_j)} < \infty.\end{aligned}$$

□

Bemerkung 3.1.7. *Für $j \in \mathscr{G}_i$ mit $j \neq i$ gilt nach Lemma 2.6.15 $\nu_{ij} \sim \mathrm{Geo}(p)$ unter $\mathbb{P}_j$, wobei $p := \mathbb{P}_j(\tau_i < \tau_j)$. Hier sind wir an der Verteilung von ν_{ij} unter $\mathbb{P}_i$ interessiert.*

Definition 3.1.8. *Es sei $i \in E$ ein rekurrenter Zustand.*

(a) Wir definieren den Vektor $\pi_i = (\pi_{ij})_{j\in E}$ durch

$$\pi_{ij} := \mathbb{E}_i[\nu_{ij}] = \sum_{n=0}^{\infty} \mathbb{P}_i(X_n = j, \tau_i > n), \quad j \in E.$$

(b) Ist i positiv rekurrent, so definieren wir den Vektor $\pi_i^* = (\pi_{ij}^*)_{j\in E}$ durch

$$\pi_{ij}^* := \frac{\pi_{ij}}{\mu_{ii}}, \quad j \in E.$$

Bemerkung 3.1.9. *Die Größe π_{ij} ist die mittlere Aufenthaltsdauer im Zustand j relativ zur Zykluslänge τ_i.*

Satz 3.1.10. *Es sei $i \in E$ rekurrent.*

(a) Es gilt $\pi_{ii} = 1$, und $\pi_{ij} = 0$ für alle $j \in \mathscr{G}_i^c$.

(b) Der Vektor π_i ist ein invariantes Maß.

(c) Ist i sogar positiv rekurrent, dann gilt $\pi_{ii}^* = \frac{1}{\mu_{ii}}$, und $\pi_{ij}^* = 0$ für alle $j \in \mathscr{G}_i^c$.

(d) Ist i sogar positiv rekurrent, dann ist π_i^* eine stationäre Verteilung.

Beweis.

(a) Folgt aus Bemerkung 3.1.5(b) und Lemma 3.1.6(a).

(b) Es sei $j \in E$ mit $j \neq i$ beliebig. Wir beachten

$$\{\tau_i > n\} = \{X_1 \neq i, \ldots, X_n \neq i\}.$$

Mit der Markov-Eigenschaft (Satz 1.2.16) gilt

$$\begin{aligned}
\pi_{ij} &= \mathbb{E}_i\left[\sum_{n=0}^{\tau_i-1} \mathbb{1}_{\{X_n=j\}}\right] = \mathbb{E}_i\left[\sum_{n=1}^{\tau_i} \mathbb{1}_{\{X_n=j\}}\right] = \mathbb{E}_i\left[\sum_{n=0}^{\tau_i-1} \mathbb{1}_{\{X_{n+1}=j\}}\right] \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} \mathbb{P}_i(X_{n+1} = j, \tau_i > n) \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k \in E} \mathbb{P}_i(X_n = k, X_{n+1} = j, \tau_i > n) \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{\substack{k \in E \\ \mathbb{P}_i(X_n=k)>0}} \mathbb{P}_i(X_n = k, X_{n+1} = j, \tau_i > n \,|\, X_n = k) \cdot \mathbb{P}_i(X_n = k) \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{\substack{k \in E \\ \mathbb{P}_i(X_n=k)>0}} \mathbb{P}_i(X_n = k, \tau_i > n \,|\, X_n = k) \cdot p_{kj} \cdot \mathbb{P}_i(X_n = k) \\
&= \sum_{k \in E} \sum_{n=0}^{\infty} \mathbb{P}_i(X_n = k, \tau_i > n) \cdot p_{kj} = \sum_{k \in E} \pi_{ik} p_{kj} = (\pi_i P)_j.
\end{aligned}$$

Eine ähnliche Rechnung zeigt außerdem

$$\begin{aligned}
\pi_{ii} = 1 = \mathbb{P}_i(X_{\tau_i} = i) = \sum_{n=0}^{\infty} \mathbb{P}_i(X_{n+1} = i, \tau_i = n+1) = \sum_{n=0}^{\infty} \mathbb{P}_i(X_{n+1} = i, \tau_i > n) \\
= \ldots = (\pi_i P)_i.
\end{aligned}$$

Insgesamt folgt

$$\pi_i = \pi_i P.$$

(c) Folgt aus Teil (a).

(d) Wegen Lemma 2.3.25 gilt

$$\sum_{j \in E} \pi_{ij} = \sum_{j \in E} \sum_{n=0}^{\infty} \mathbb{P}_i(X_n = j, \tau_i > n) = \sum_{n=0}^{\infty} \mathbb{P}_i(\tau_i > n) = \mathbb{E}_i[\tau_i] = \mu_{ii}.$$

Also ist π_i^* ein stochastischer Vektor, und mit Teil (b) folgt, dass π_i^* eine stationäre Verteilung ist.

□

Satz 3.1.11. *Falls die Markov-Kette positiv rekurrent ist und genau eine stationäre Verteilung π^* besitzt, so ist diese gegeben durch*

$$\pi_i^* = \frac{1}{\mu_{ii}}, \quad i \in E.$$

Beweis. Es sei $i \in E$ beliebig. Nach Satz 3.1.10 ist π_i^* eine stationäre Verteilung, und es gilt

$$\pi_{ii}^* = \frac{1}{\mu_{ii}}.$$

Wegen der Eindeutigkeit der stationären Verteilung folgt für alle $i \in E$

$$\pi_i^* = \pi_{ii}^* = \frac{1}{\mu_{ii}}.$$

□

3.2 Der Ergodensatz

Definition 3.2.1. *Für zwei Maße ν und π auf $(E, \mathscr{E})$ definieren wir den Abstand*

$$d(\nu, \pi) := \sup_{A \subset E} |\nu(A) - \pi(A)|.$$

Satz 3.2.2 (Ergodensatz)**.** *Die Markov-Kette sei aperiodisch und positiv rekurrent. Dann gelten folgende Aussagen:*

(a) Es existiert eine eindeutig bestimmte stationäre Verteilung π, gegeben durch

$$\pi_i = \frac{1}{\mu_{ii}}, \quad i \in E.$$

(b) Für jeden stochastischen Vektor λ als Anfangsverteilung gilt

$$\lim_{n \to \infty} d(\mathbb{P}_\lambda \circ X_n, \pi) = 0.$$

(c) Für jeden Zustand $i \in E$ gilt

$$\lim_{n \to \infty} p_{ij}^{(n)} = \pi_j = \frac{1}{\mu_{jj}}, \quad j \in E.$$

Beweis.

(a) Angenommen, wir haben beweisen, dass eine stationäre Verteilung wie in Teil (b) existiert. Es sei λ eine weitere stationäre Verteilung. Dann gilt nach Lemma 3.1.2(b)

$$d(\lambda, \pi) = \lim_{n\to\infty} d(\mathbb{P}_\lambda \circ X_n, \pi) = 0.$$

Also gilt $\lambda = \pi$. Mit Satz 3.1.11 folgt nun

$$\pi_i = \frac{1}{\mu_{ii}}, \quad i \in E.$$

(b) Siehe [Als16, Satz 4.11].

(c) Nach Teil (b) gilt

$$|p_{ij}^{(n)} - \pi_j| = |\mathbb{P}_i(X_n = j) - \pi_j| \leq d(\mathbb{P}_i \circ X_n, \pi) \to 0.$$

$\square$

Bemerkung 3.2.3. *Der Ergodensatz (Satz 3.2.2) gilt insbesondere für jede aperiodische Markov-Kette mit endlichem Zustandsraum. Dies folgt aus Korollar 2.6.21.*

Beispiel 3.2.4. *Wir betrachten den Zustandsraum $E = \{1,2,3\}$ und die Übergangsmatrix*

$$P = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{3} & \frac{2}{3} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \end{pmatrix}.$$

Die Markov-Kette ist nach Korollar 2.1.11 irreduzibel, da

$$P^2 = \begin{pmatrix} \frac{1}{4} & \frac{5}{12} & \frac{1}{3} \\ \frac{2}{9} & \frac{1}{3} & \frac{4}{9} \\ \frac{5}{18} & \frac{7}{18} & \frac{1}{3} \end{pmatrix}.$$

Die Markov-Kette ist aperiodisch, da $p_{ii} > 0$, und somit

$$d_i = \mathrm{ggT}\,\{n \in \mathbb{N} : p_{ii}^{(n)} > 0\} = 1$$

für alle $i = 1,2,3$. Der stochastische Vektor

$$\pi = \left(\frac{1}{4}, \frac{3}{8}, \frac{3}{8}\right).$$

ist eine stationäre Verteilung, da

$$\pi = \pi P.$$

Nach dem Ergodensatz (Satz 3.2.2) gilt für jeden stochastischen Vektor λ als Anfangsverteilung

$$\mathbb{P}_\lambda \circ X_n \approx \pi \quad \text{für große } n \in \mathbb{N}.$$

Literaturverzeichnis

[Als16] Alsmeyer, G.: *Diskrete Markov-Ketten und Markov-Sprungprozesse.* 2016. – Vorlesungsskript aus dem WS 2015/16, Universität Münster

[Bre92] Breiman, L.: *Probability.* Philadelphia : Society for Industrial and Applied Mathematics, 1992

[Bré99] Brémaud, P.: *Markov chains. Gibs fields, Monte-Carlo simulation and queues.* New York : Springer-Verlag, 1999

[Dep16] Depperschmidt, A.: *Markovketten.* 2016. – Vorlesungsskript aus dem SS 2016, Universität Freiburg

[Kle13] Klenke, A.: *Wahrscheinlichkeitstheorie.* Berlin : Springer-Verlag, 2013

[Nor97] Norris, J. R.: *Markov chains.* Cambridge : Cambridge University Press, 1997

[Res05] Resnick, S. I.: *Adventures in stochastic processes.* Boston : Birkhäuser, 2005