Markov-Ketten **SS 2018**

Vorlesung: apl. Prof. Dr. Stefan Tappe
Übung: Wahid Khosrawi-Sardroudi
http://http://www.stochastik.uni-freiburg.de/lehre/ss-2018/vorlesung-markov-ketten-ss-2018

Übung 2

Abgabe: 15.05.2016 zu Beginn der Vorlesung.

Aufgabe 1 (4 Punkte)**.**

Zum Zeitpunkt 0 enthalte eine Urne r rote und w weiße Kugeln, wobei $r, w \in \mathbb{N}$ seien. Zu jedem Zeitpunkt $n \in \mathbb{N}$ wird zufällig eine Kugel aus der Urne gezogen und zusammen mit einer weiteren Kugel derselben Farbe in die Urne zurückgelegt. Für $n \in \mathbb{N}$ definieren wir $X_n := (X_n^{(1)}, X_n^{(2)})$ darurch, dass $X_n^{(1)}$ $(X_n^{(2)})$ die Anzahl der roten (weißen) Kugeln in der Urne nach n Zügen angibt. Zeigen Sie, dass der stochastische Prozess $(X_t)_{t\in\mathbb{N}}$ eine homogene Markovkette ist. Geben Sie auch den Zustandsraum und die Übergangsmatrix an. Sei nun $Y_n := X_n^{(1)}$ die Anzahl der roten Kugeln in der Urne nach n Zügen. Zeigen Sie, dass $(Y_t)_{t\in\mathbb{N}}$ eine nicht homogene Markov-Kette ist.

Aufgabe 2 (4 Punkte)**.**

Seien E, F abzählbare Mengen, sei $(X_t)_{t\in\mathbb{N}_0}$ eine Markov-Kette mit Zustandsraum E und sei $h : E \to F$ eine Abbildung. Für $t \in \mathbb{N}_0$ definieren wir den Prozess $Y := h(X)$ durch $Y_t = h(X_t)$.

(a) Zeigen Sie für h injektiv, dass Y eine Markov-Kette ist.

(b) Geben Sie ein Gegenbeispiel an für h nicht injektiv, bei dem Y keine Markov-Kette mehr ist.

Hinweis: Für einen Prozess $X = (X_t)_{t\in\mathbb{N}_0}$ definieren wir den Prozess $f(X)$ punktweise durch

$$f(X)_t := f(X_t)$$

Aufgabe 3 (4 Punkte)**.**

Beweisen Sie die folgenden Lemmata/Sätze aus der Vorlesung:

(a) Lemma 1.3.7

(b) Satz 1.3.8

(c) Satz 1.3.10

(d) Lemma 1.3.11

Bitte wenden

Aufgabe 4 (4 Punkte)**.** Für eine homogene Markov-Kette mit Zustandsraum E sagen wir zwei Zustände $i, j \in E$ kommunizieren miteinander, wenn es ein von i und j abhängiges n und m gibt mit

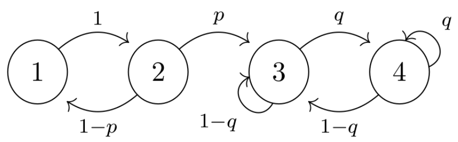
$$P(X_n = j \mid X_0 = i) > 0$$

und

$$P(X_m = i \mid X_0 = j) > 0.$$

Eine Teilmenge $A \subset E$ heißt wesentliche Klasse, falls für jeweils zwei beliebige Elemente $i, j \in A$ gilt, dass sie miteinander kommunizieren und sie maximal ist, d.h. kein Element hinzugefügt werden kann ohne die obige Eigenschaft zu verlieren..

Betrachten Sie die Markovkette mit dem folgenden Übergangsgraphen:



Geben Sie in Abhängigkeit von $p, q \in [0, 1]$ die wesentlichen Klassen der Markovkette an.