Übungen zur Vorlesung
"Stochastische Analysis"

Sommersemester 2017, Blatt 10

Abgabetermin: 07.07.2017, bis 12:00 Uhr in Fach Nr. 3.14., UG Eckerstr. 1
(Geben Sie auf jedem Lösungsblatt Ihren Namen und Ihre Übungsgruppe an.
Bitte nur maximal zu zweit abgeben.)

Aufgabe 37 (4 Punkte)

Es sei $(W_t)_{t\geq 0}$ eine standardisierte Brown'sche Bewegung.

a) Zeigen Sie, dass der durch

$$X_t := \int_0^t \exp\left(W_t - W_s - \tfrac{1}{2}(t-s)\right) ds,\ t \geq 0$$

definierte Prozess die folgende Darstellung besitzt:

$$X_t = dt + X_t dW_t,\ t \geq 0.$$

b) Zeigen Sie, dass $(Y_t)_{t\geq 0}$, definiert durch $Y_t := \frac{W_t}{1+t}$, die stochastische Differentialgleichung

$$dY_t = -\frac{1}{1+t} Y_t\, dt + \frac{1}{1+t}\, dW_t$$

mit Anfangswert $Y_0 = 0$ löst.

Hinweis: Für die Lösung von a) kann Lemma 2.1 für ein komplexwertiges stetiges lokales Martingal M verwendet werden.

Aufgabe 38 (4 Punkte)

Zeigen Sie, dass der Ornstein-Uhlenbeck Prozess und die in den Aufgaben 30, 37a und 37b angegebenen Lösungen der dort diskutierten stochastischen Differentialgleichungen starke Lösungen sind und prüfen Sie zusätzlich, ob Satz 3.5 anwendbar ist.
Zeigen Sie für den Ornstein-Uhlenbeck Prozess, dass er die (bis auf den Startwert) eindeutige starke Lösung von (1) ist.

Hinweis: Für eine reellwertige Zufallsvariable X_0 und $\mu, \sigma \geq 0$ wird der Prozess $X = (X_t)_{t\geq 0}$ definiert durch

$$X_t := e^{-\mu t}\Big(X_0 + \sigma \int_0^t e^{\mu s} dW_s\Big),$$

der eine Lösung der stochastischen Differentialgleichung

$$dX_t = -\mu X_t\, dt + \sigma\, dW_t, \tag{1}$$

ist, als *Ornstein-Uhlenbeck Prozess* bezeichnet.

Aufgabe 39 (4 Punkte)

Prüfen Sie, ob zur stochastischen Differentialgleichungen

$$dX = \operatorname{sgn}(X)\, dW$$

eine schwache oder eine starke Lösung existiert.

Hinweis: Es gilt

$$\operatorname{sgn}(x) := \begin{cases} 1\,, & \text{falls } x \geq 0\,, \\ -1\,, & \text{falls } x < 0\,. \end{cases}$$

Verwenden Sie Satz 1.30 und vergleichen sie die Filtrationen von W, $|X|$ und X um die Existenz einer starken Lösung zu prüfen.

Aufgabe 40 (4 Punkte)

Zeigen Sie Lemma 3.1 (progressive Funktionen) aus der Vorlesung:
Sei die Funktion f auf $\mathbb{R}_+ \times \mathcal{C}(\mathbb{R}_+, \mathbb{R}^d)$ progressiv für die induzierte Filtration $(\mathcal{G}_t)_{t\geq 0} = (\sigma(w_s : s \leq t))_{t\geq 0}$ auf $\mathcal{C}(\mathbb{R}_+, \mathbb{R}^d)$ und sei X ein stetiger, $\mathcal{F}$-adaptierter Prozess in $\mathbb{R}^d$. Dann ist der Prozess $Y_t = f(t, X)$ $\mathcal{F}$-progressiv.