Die Skorokhodtopologie auf $\mathbb{D}(\mathbb{R}^d)$

Definition (Der Raum $(\mathbb{D}(\mathbb{R}^d), \mathcal{D}(\mathbb{R}^d))$).

1. Der Raum $\mathbb{D}(\mathbb{R}^d)$ ist der Raum aller càdlàg Funktionen $\alpha : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}^d$. Eine Funktion heißt càdlàg, falls sie rechtsseitig stetig ist und ihre linksseitigen Grenzwerte existieren.
2. Sei $\pi_s : \mathbb{D}(\mathbb{R}^d) \to \mathbb{R}^d$, $\alpha \mapsto \alpha(s)$, die Auswertung von $\alpha \in \mathbb{D}(\mathbb{R}^d)$ am Zeitpunkt s, dann sind folgende σ-Algebren auf $\mathbb{D}(\mathbb{R}^d)$ definiert

$$\mathcal{D}_t^0(\mathbb{R}^d) \coloneqq \sigma(\pi_s | s \le t), \qquad \mathcal{D}(\mathbb{R}^d) \coloneqq \bigvee_{t \ge 0} D_t^0(\mathbb{R}^d), \qquad \mathcal{D}_t(\mathbb{R}^d) \coloneqq \bigcap_{s>t} \mathcal{D}_s^0.$$

Definition (Stetigkeitsmodul). Für eine Abbildung $\alpha : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}^d$, $\delta > 0$ und $N \in \mathbb{N}$ ist

1. $\omega(\alpha, I) \coloneqq \sup\limits_{s,s' \in I} |\alpha(s) - \alpha(s')|$
2. $\omega_N(\alpha, \delta) \coloneqq \sup\limits_{\substack{s,s' \in [0,N] \\ |s-s'|<\delta}} |\alpha(s) - \alpha(s')|.$
3. $\omega'_N(\alpha, \delta) \coloneqq \inf \left\{ \max\limits_{i \le r} \omega(\alpha, [t_{i-1}, t_i)) \;\middle|\; 0 = t_0 < \dots < t_r = N,\ \min\limits_{i<r} |t_i - t_{i-1}| \ge \delta \right\}$

Theorem 1.5. *Eine Funktion $\alpha : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}^d$ ist càdlàg genau dann, wenn*

$$\sup_{s \in [0,N]} |\alpha(s)| < \infty \quad \textit{und} \quad \lim_{\delta \searrow 0} \omega_{N'}(\alpha, \delta) = 0$$

Die Menge Λ sei die Menge aller stetigen und strikt monoton wachsenden Funktionen $\lambda : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$ mit $\lambda(0) = 0$ und $\lim\limits_{t \to \infty} \lambda(t) = \infty$.

Theorem 1.14 (Die Skorokhodtopologie).

a) Es existiert eine Topologie auf $\mathbb{D}(\mathbb{R}^d)$, genannt Skorokhod-Topologie, für die der Raum polnisch ist und die wie folgt charakterisiert werden kann:

Eine Folge $(\alpha_n)_{n \in \mathbb{N}}$ konvergiert gegen eine Funktion α genau dann, wenn es eine Folge $(\lambda_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset \Lambda$ gibt, sodass

i) $\sup\limits_{s \in \mathbb{R}_+} |\lambda_n(s) - s| \to 0$

ii) $\sup\limits_{s \in [0,N]} |\alpha_n \circ \lambda_n(s) - \alpha(s)| \to 0$ *für alle $N \in \mathbb{N}$*

b) Eine Menge $A \subset \mathbb{D}(\mathbb{R}^d)$ ist relativ kompakt bezüglich der Skorokhod-Topologie genau dann, wenn

i) $\sup\limits_{\alpha \in A} \sup\limits_{s \in [0,N]} |\alpha(s)| < \infty$ *für alle $N \in \mathbb{N}$*

ii) $\lim\limits_{\delta \searrow 0} \sup\limits_{\alpha \in A} \omega'_N(\alpha, \delta) = 0$ *für alle $N \in \mathbb{N}$*

c) Die Borel-σ-Algebra $\mathcal{B}(\mathbb{D}(\mathbb{R}^d))$ entspricht der zu Anfang definierten σ-Algebra $\mathcal{D}(\mathbb{R}^d)$.

Proposition 1.17.

1. *Die Skorokhod-Topologie ist gröber als die lokal gleichmäßige Topologie.*
2. *Ist α stetig, so konvergiert eine Folge $(\alpha_n)_{n\in\mathbb{N}}$ genau dann gegen α bezüglich der Skorokhod-Topologie, wenn sie lokal gleichmäßig gegen α konvergiert.*

Proposition 1.23. *Gilt $\alpha_n \to \alpha$ und $\beta_n \to \beta$ bezüglich der Skorokhod Topologie und ist β stetig, so folgt, dass $\alpha_n + \beta_n \to \alpha + \beta$.*

Schwache Topologie und Straffheit

Definition. Sei E ein polnischer Raum mit Borel-σ-Algebra $\mathcal{E}$. Wir bezeichnen mit $\mathcal{P}(E)$ den Raum aller Wahrscheinlichkeitsmaße auf $(E, \mathcal{E})$. Die Topologie auf $\mathcal{P}(E)$ sei die gröbste Topologie, sodass die Abbildungen $\mu \mapsto \mu(f)$ für alle stetigen beschränkten Funktionen auf E stetig sind. Eine Folge von Zufallsvariablen $(X^n)_{n\in\mathbb{N}}$ in einem polnischen Raum, also $X^n : (\Omega^n, \mathcal{F}^n, \mathbb{P}^n) \to (E, \mathcal{E})$, konvergiert in Verteilung gegen X (schreibe $X^n \xrightarrow{\mathcal{L}} X$), falls ihre Verteilung $\mathbb{P}^{X^n}$ in $\mathcal{P}(E)$ gegen $\mathbb{P}^X$ konvergieren.

Bemerkung.

1. Mit dieser Topologie ist $\mathcal{P}(E)$ selbst ein polnischer Raum
2. Eine Folge $(\mu_n)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergiert in $\mathcal{P}(E)$ gegen μ (schreibe $\mu_n \Rightarrow \mu$) genau dann, wenn
$$\int_E f \,\mathrm{d}\mu_n \to \int_E f \,\mathrm{d}\mu \qquad \text{für alle } f \in \mathcal{C}_b(E)$$

Proposition 3.1 (Portemanteau-Theorem)**.** *Seien $\mu_n,\ \mu \in \mathcal{P}(E)$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Dann sind folgende Aussagen äquivalent*

1. $\mu_n \Rightarrow \mu$
2. $\liminf_{n\to\infty} \mu(O) \geq \mu(O)$ *für alle offenen $O \subset E$*
3. $\limsup_{n\to\infty} \mu(A) \leq \mu(A)$ *für alle abgeschlossenen $A \subset E$*
4. $\mu_n(B) \to \mu(B)$ *für alle $B \in \mathcal{E}$ mit $\mu(\partial B) = 0$*

Proposition 3.2. *a) Falls $\mu_n \Rightarrow \mu$ und f eine beschränkte Funktion auf E ist, die μ-f.s. stetig ist. Dann gilt*
$$\mu_n(f) \to \mu(f).$$

b) Falls $X_n \xrightarrow{\mathcal{L}} X$ und $h : E \to \mathbb{R}$ beschränkt und $\mathbb{P}^X$f.s. stetig ist, so gilt

$$\mathbb{E}_{\mathbb{P}^n}(h(X_n)) \to \mathbb{E}_{\mathbb{P}}(h(X))$$

Proposition 3.3. *a) Sei E' ein weiterer polnischer Raum und $h : E \to E'$. Die Abbildung $\mu \mapsto \mu \circ h^{-1}$ ist stetig von $\mathcal{P}(E)$ nach $\mathcal{P}(E')$ an jedem Punkt μ, an dem h μ-f.s. stetig ist.*

b) Falls $X_n \xrightarrow{\mathcal{L}} X$ und $h : E \to E'$ und $\mathbb{P}^X$f.s. stetig ist, dann gilt

$$h(X_n) \xrightarrow{\mathcal{L}} h(X)$$

Eine verteilungsbestimmende Klasse $\mathscr{H}$ ist eine Teilmenge der stetigen, beschränkten Funktionen mit der Eigenschaft

$$\mu_n(h) \to \mu(h) \quad \forall\ h \in \mathscr{H} \qquad \Longrightarrow \qquad \mu_n \Rightarrow \mu.$$

Proposition 3.4. *Es existiert eine abzählbare verteilungsbestimmende Klasse auf E.*

Proposition 3.5 (Prohorov)**.** *Eine Menge $A \subset \mathcal{P}(E)$ ist relativ kompakt genau dann, wenn sie straff ist.*

Im folgenden Abschnitt betrachten wir ausschließlich $\mathbb{R}^d$-wertige càdlàg Prozesse.

Definition 3.10. Die Menge J beschreibe die Menge der Sprungstellen mit positiver Wahrscheinlichkeit und U die Menge der Sprunghöhen mit positiver Wahrscheinlichkeit, genauer

$$J(X) := \Big\{ t \geq 0 \ \big|\ \mathbb{P}[\triangle X_t \neq 0] > 0 \Big\}$$

$$U(X) := \Big\{ u > 0 \ \big|\ \mathbb{P}\big[|\triangle X_t| = u \text{ für ein } t > 0\big] > 0 \Big\}$$

$$T_0(X,u) := 0, \qquad T_{n+1}(X,u) := \inf \Big\{ t > T_n(X,u) \ \big|\ |\triangle X_t| > u \Big\}$$

Lemma 3.12. *Die Mengen $J(X)$ und $U(X)$ sind höchstens abzählbar.*

Definition 3.13. Wir betrachten eine Folge $(X^n)_{n\in\mathbb{N}}$ von $\mathbb{R}^d$-wertigen càdlàg Prozessen. Jedes X^n sei definiert auf dem Wahrscheinlichkeitsraum $(\Omega^n, \mathcal{F}^n, \mathbb{P}^n)$. Wir schreiben

$$X^n \xrightarrow{\mathscr{L}} X, \text{ falls } \quad \mathbb{P}^{X^n} \Rightarrow \mathbb{P}^X.$$

Ist D eine Teilmenge von $\mathbb{R}_+$, so schreiben wir

$$X^n \xrightarrow{\mathscr{L}(D)} X, \text{ falls } \quad \big(X^n_{t_1}, \dots, X^n_{t_k}\big) \xrightarrow{\mathscr{L}} \big(X_{t_1}, \dots, X_{t_k}\big) \ \forall\ t_i \in D,\ \forall\ k \in \mathbb{N}.$$

Proposition 3.14. *Falls $X^n \xrightarrow{\mathscr{L}} X$, dann gilt $X^n \xrightarrow{\mathscr{L}(D)} X$ für $D = \mathbb{R}_+ \setminus J(X)$. (Im Allgemeinen nicht für $D = \mathbb{R}_+$.)*

Proposition 3.17. *Falls $X^n \xrightarrow{\mathscr{L}} X$ und β eine stetige Funktion von $\mathbb{R}_+$ nach $\mathbb{R}^d$ ist, dann gilt*

$$X^n + \beta \xrightarrow{\mathscr{L}} X + \beta$$

Lemma 3.19. *Sei D eine dichte Teilmenge von $\mathbb{R}_+$ und X und Y zwei càdlàg Prozesse mit*

$$\mathbb{P}^{(X_{t_1},\dots,X_{t_k})} = \mathbb{P}^{(Y_{t_1},\dots,Y_{t_k})} \quad \forall\ t_i \in D,\ k \in \mathbb{N}.$$

Dann gilt $\mathbb{P}^X = \mathbb{P}^Y$.

Theorem 3.20. *Ein Folge von stochastischen Prozessen mit cádlág Pfaden konvergiert in Verteilung genau dann gegen einen Prozess X, wenn sie ist straff, also relativ Folgenkompakt, ist und $X^n \xrightarrow{\mathcal{L}(D)} X$ für $D = \mathbb{R}_+ \setminus J(X)$.*

Theorem 3.21. *Ein Folge von stochastischen Prozessen mit càdlàg Pfaden $(X^n)_{n\in\mathbb{N}}$ ist straff genau dann, wenn*

i) Für alle $N \in \mathbb{N}$, $\varepsilon > 0\ \exists\ n_0 \in \mathbb{N}$ und $K \in \mathbb{R}_+$ mit

$$n \geq n_0 \quad \Longrightarrow \quad \mathbb{P}^n\left[\sup_{t\in[0,N]} |X_t^n| > K\right] \leq \varepsilon$$

ii) Für alle $N \in \mathbb{N},\ \varepsilon > 0,\ \eta > 0$ existiert $n_0 \in \mathbb{N}$ und $\theta > 0$ mit

$$n \geq n_0 \quad \Longrightarrow \quad \mathbb{P}^n\Big[\omega'_N(X^n,\theta) \geq \eta\Big] \leq \varepsilon$$

Definition 3.25 (C-straff)**.** Eine Folge $(X^n)_{n\in\mathbb{N}}$ von stochastischen Prozessen heißt C-straff, falls sie straff ist und jeder Häufungspunkt von $\{\mathbb{P}^{X^n}\}$ die Verteilung eines stetigen Prozesses ist (Konvergiert also eine Teilfolge $\mathbb{P}^{X^{n_k}}$ gegen $\mathbb{P}$ in $\mathcal{P}(\mathbb{D}(\mathbb{R}^d))$, so ist $\mathbb{P}[\mathbb{D}(\mathbb{R}^d) \setminus \mathcal{C}(\mathbb{R}_+,\mathbb{R}^d)] = 0$).

Proposition 3.26. *Folgende Aussagen sind äquivalent*

a) Die Folge $(X^n)_{n\in\mathbb{N}}$ ist C-straff

b) Die Folge $(X^n)_{n\in\mathbb{N}}$ hat die Eigenschaften

i) Für alle $N \in \mathbb{N}$, $\varepsilon > 0\ \exists\ n_0 \in \mathbb{N}$ und $K \in \mathbb{R}_+$ mit

$$n \geq n_0 \quad \Longrightarrow \quad \mathbb{P}^n\left[\sup_{t\in[0,N]} |X_t^n| > K\right] \leq \varepsilon$$

ii) Für alle $N \in \mathbb{N},\ \varepsilon > 0,\ \eta > 0$ existiert $n_0 \in \mathbb{N}$ und $\theta > 0$ mit

$$n \geq n_0 \quad \Longrightarrow \quad \mathbb{P}^n\Big[\omega_N(X^n,\theta) \geq \eta\Big] \leq \varepsilon$$

c) Die Folge $(X^n)_{n\in\mathbb{N}}$ ist straff und für alle $N \in \mathbb{N}$ und $\varepsilon > 0$ gilt

$$\lim_{n\to\infty} \mathbb{P}^n\left[\sup_{t\in[0,N]} |\triangle X_t^n| > \varepsilon\right] = 0.$$