Einführung in funktionale Grenzwertsätze

Definition VI.2.14. Wir bezeichnen mit $\mathscr{V}^{+,1}$ = die Menge der *Zählfunktionen*, d.h. Funktionen $\alpha \in \mathbb{D}(\mathbb{R})$ der Form

$$\alpha(s) = \sum_{n \geq 1} \mathbb{1}_{\{t_n \leq s\}}, \quad t_n \nearrow \infty, \quad t_1 > 0, \quad t_n < t_{n+1} \text{ falls } t_n < \infty.$$

Definition I.3.26. Ein *erweiterter Poissonprozess* auf $(\Omega, \mathscr{F}, \mathbb{F}, P)$ ist ein adaptierter Prozess N mit Werten in $\mathscr{V}^{+,1}$, sodass

(i) $E[N_t] < \infty$ für alle $t \geq 0$,

(ii) $N_t - N_s$ ist unabhängig von $\mathscr{F}_s$ für alle $0 \leq s < t$.

$A_t = E[N_t]$ heißt *Intensitätsfunktion.* Ist A stetig, nennen wir N *Poissonprozess.*

Wir betrachten eine Folge von Poissonprozessen X^n mit Intensitätsfunktionen A^n (monoton steigend, stetig, deterministisch). X ist ein Poissonprozess mit Intensität A.

Wir möchten den folgenden Satz beweisen.

Satz 1.1. *Falls $A_t^n \to A_t$ für alle $t \geq 0$, so gilt $X^n \xrightarrow{\mathscr{L}} X$.*

Wir gehen im Beweis in zwei Schritten vor: Beweise die Straffheit der Folge (X^n) und identifiziere dann alle (schwachen) Grenzwerte von $(\mathscr{L}(X^n))$ mit der Verteilung $\mathscr{L}(X)$ von X.

Straffheit

Die Straffheit folgt aus Satz VI.4.18. Wählt man dort die Abschneidefunktion $h \in C_t^1$ so, dass $h(1) = 0$ gilt, sind die Charakteristiken und modifizierten zweiten Charakteristiken von X^n relativ zur Filtration F^n die folgenden:

$$B^n = 0, \quad C^n = 0, \quad \widetilde{C}^n = 0, \quad \nu^n(dt, dx) = dA^n(t) \otimes \varepsilon_1(dx).$$

Identifikation des Grenzwerts

1) Endlichdimensionale Methode

Lemma 1.3. *Seien X^n und X beliebige PII's mit Werten in $\mathbb{R}^d$, $D \subseteq \mathbb{R}_+$. Dann gilt:*

$$X^n \xrightarrow{\mathscr{L}(D)} X \quad \Leftrightarrow X_t^n - X_s^n \xrightarrow{\mathscr{L}} X_t - X_s \quad \forall s, t \in D \cup \{0\}.$$

2) Martingalmethode

Satz 1.4. *Sind* (M^n) *lokale Martingale, sodass* $|\Delta M^n|$ *gleichmäßig beschränkt ist und* $M^n \xrightarrow{\mathscr{L}} M$ *gilt, so ist* M *ein lokales Martingal relativ zu der von* M *generierten Filtration.*

3) Mehthode mit notwendiger Bedingung für Konvergenz

Satz 1.5. *Es gelte* $X^n \xrightarrow{\mathscr{L}} Y$. *Dann ist* Y *ein erweiterter Poissonprozess und für die Intensität* A' *von* Y *gilt* $A_t^n \to A_t'$ *für alle* $t \in D(Y) := \{t \geq 0 | P(\Delta Y_t \neq 0) = 0\}$.

Konvergenz unendlich teilbarer Verteilungen

Definition. Die Verteilung einer Zufallsvariablen X auf $\mathbb{R}^d$ heißt *unendlich teilbar*, falls für alle $n \in \mathbb{N}$ unabhängig identisch verteilte Zufallsvariablen $X_1^n, \ldots, X_2^n$ auf $\mathbb{R}^d$ existieren, sodass $X \stackrel{d}{=} \sum_{i=1}^n X_i^n$ gilt.

Für unendlich teilbare Verteilungen gilt die *Lévy-Khintchine-Formel*: Wähle (irgendeine) Abschneidefunktion $h \in \mathscr{C}_t^d$ (d.h. eine Funktion $h : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^d$, beschränkt, $h(x) = x$ in einer Umgebung von 0). In diesem Abschnitt wählen wir h stetig. Dann ist eine Funktion $\varphi : \mathbb{R}^d \to \mathbb{C}$ die charakteristische Funktion einer unendlich teilbaren Verteilung genau dann, wenn es ein Triple (b, c, F) gibt (die *Charakteristiken* der Verteilung), bestehend aus

$b \in \mathbb{R}^d$,

c, eine $d \times d$ symmetrische nichtnegative Matrix,

F, ein positives Maß auf $\mathbb{R}^d$ mit $F(\{0\}) = 0$ und $\int_{\mathbb{R}^d} |x|^2 \wedge 1 dF(x) < \infty$,

und so, dass $\varphi = \exp \psi_{b,c,F}$, wobei

$$\psi_{b,c,F}(u) = iu \cdot b - \frac{1}{2} u \cdot c \cdot u + \int_{\mathbb{R}^d} (e^{iu \cdot x} - 1 - iu \cdot h(x)) dF(x).$$

Außerdem benötigen wir die $d \times d$ symmetrische Matrix

$$\tilde{c} = (\tilde{c}^{ij}), \quad \tilde{c}^{ij} = c^{ij} + \int h^i(x) h^j(x) dF(x).$$

Zudem benötigen wir noch folgende Eigenschaft:

Sei $(\mu_n)_{n\geq 1}$ eine Folge unendlich teilbarer Verteilungen mit Charakteristiken (b_n, c_n, F_n), die schwach gegen die Verteilung μ konvergiert. Dann ist μ unendlich teilbar und für seine Charakteristiken (b, c, F) gilt $\psi_{b_n,c_n,F_n} \to \psi_{b,c,F}$ gleichmäßig auf kompakten Teilmengen des $\mathbb{R}^d$.

Wir bezeichnen mit $F(g) := \int g dF$ das Integral über g bezüglich des Maßes F. Nun benötigen wir noch einige Klassen von Funktionen:

> $C_2(\mathbb{R}^d)$ = Menge aller stetigen beschränkten Funktionen: $\mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$, die 0 nahe 0 sind.
>
> $C_3(\mathbb{R}^d)$ = Menge aller stetigen beschränkten Funktionen $f : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$ mit $f(x) = o(|x|^2)$ für $|x| \to 0$.
>
> $C_4(\mathbb{R}^d)$ = Menge aller stetigen Funktionen $f : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$, die 0 nahe 0 sind mit $f(x)/|x|^2$ ist beschränkt.
>
> $C_1(\mathbb{R}^d)$ = eine Teilmenge von $C_2(\mathbb{R}^d)$, die nur nichtnegative Funktionen enthält, alle Funktionen $g_a(x) = (a|x| - 1)^+ \wedge 1$ mit $a \in \mathbb{Q}_+$ enthält und folgende Eigenschaft hat: sind η_n, η pos. Maße auf $\mathbb{R}^d$ mit Nullmenge $\{0\}$, die endlich außerhalb jeder Umgebung der 0 sind, so folgt aus $\eta_n(f) \to \eta(f) \quad \forall f \in C_1(\mathbb{R}^d)$ bereits $\eta_n(f) \to \eta(f) \quad \forall f \in C_2(\mathbb{R}^d)$.

Satz 2.9. *Sei die Abschneidefunktion h stetig. Seien $(\mu_n)_{n\geq 1}$ und μ unendlich teilbare Verteilungen auf $\mathbb{R}^d$ mit Charakteristiken (b_n, c_n, F_n) und (b, c, F) und $\tilde{c}_n$ und $\tilde{c}$ wie oben. Wir formulieren die Bedingungen*

> $[\beta_1]$ $\quad b_n \to b,$
>
> $[\gamma_1]$ $\quad \tilde{c}_n \to \tilde{c},$
>
> $[\delta_{1,i}]$ $\quad F_n(g) \to F(g) \quad \forall g \in C_i(\mathbb{R}^d).$

Dann gilt $\mu_n \to \mu$ schwach genau dann, wenn $[\beta_1]$, $[\gamma_1]$ und $[\delta_{1,1}]$ erfüllt sind. In diesem Fall sind auch $[\delta_{1,2}]$ und $[\delta_{1,3}]$ erfüllt.

In manchen Fällen muss man keine Abschneidefunktion verwenden (soll heißen, h muss nicht beschränkt sein, d.h. wir können $h(x) = x$ setzen). In diesen Fällen kann man den vorangegangenen Satz etwas anders formulieren. Genauer: Sei μ eine unendlich teilbare Verteilung mit Charakteristiken (b, c, F), und gelte

$$\int |x|^2 dF(x) < \infty. \tag{$\star$}$$

Dann setze

$$b' = b + \int (x - h(x))dF(x),$$
$$\tilde{c}'^{jk} = c^{jk} + \int x^j x^k dF(x) = \tilde{c}^{jk} + \int x^j x^k - h^j(x)h^k(x)dF(x).$$

Dann gilt

$$\psi_{b,c,F}(u) = \psi'_{b',c,F}(u) := iu \cdot b' - \frac{1}{2} u \cdot c \cdot u + \int (e^{iu \cdot x} - 1 - iu \cdot x) dF(x).$$

Satz 2.14. *Unter den Voraussetzungen von Satz 2.9 mögen F_n und F $(\star)$ genügen und wir definieren b', b'_n und $\tilde{c}'$, $\tilde{c}'_n$ wie oben. Es gelte zudem*

$$\lim_{a \nearrow \infty} \limsup_n \int |x|^2 \mathbb{1}_{\{|x|>a\}} dF_n(x) = 0.$$

Dann gilt $\mu_n \to \mu$ schwach genau dann, wenn gilt:

$[\beta'_1]$ $\quad b'_n \to b'$

$[\gamma'_1]$ $\quad \tilde{c}'_n \to \tilde{c}'$

und $[\delta_{1,1}]$ In diesem Fall gilt zudem $[\delta_{1,i}]$ für $i = 2, 3, 4$.

Literatur

[1] J. Jacod und A. Shiryaev. *Limit Theorems for Stochastic Processes.* Springer, 2003.

[2] O. Kallenberg. *Foundations of Modern Probability.* Springer, 1997.