Übungen zur Vorlesung
"Stochastik"

Sommersemester 2016, Blatt 6

Abgabetermin: keine Abgabe

(Dieses Blatt dient der Übung und Wiederholung als Unterstützung zur Vorbereitung auf die Klausur. Eine Lösungsskizze wird voraussichtlich eine Woche vor der Klausur auf die Homepage gesetzt. Weder Umfang, Schwierigkeitsgrad noch Thematik dient als Orientierung für die Klausur.)

Aufgabe 21

Seien $X_1, \dots, X_n$ unabhängige und identisch verteilte Zufallsvariablen mit $X_i \sim \mathrm{Exp}_\lambda$, $\lambda > 0$. Bestimmen Sie den Maximum-Likelihood Schätzer für λ und zeigen Sie, dass dieser konsistent ist (d.h. dass er für $n \to \infty$ in Wahrscheinlichkeit gegen λ konvergiert).

Aufgabe 22

Bei einer Wahlumfrage erklärten 108 von $n = 500$ befragten Personen, dass sie bei der nächsten Wahl eine bestimmte Partei wählen würden. Die Antworten können als Zufallsvariablen $X_1, \dots, X_n$ aufgefasst werden. Bestimmen Sie ein zweiseitiges Konfidenzintervall zur Sicherheit $1 - \alpha$ für den wahren Stimmanteil p der Partei in der Gesamtbevölkerung. Betrachten Sie dazu die approximative Verteilung von Z bzw. $|Z|$ mit

$$Z := \frac{\bar{X}_n - p}{\sqrt{p(1-p)/n}}.$$

Aufgabe 23

Seien $X_1, \dots, X_n$ unabhängige identisch $\mathcal{N}_{\mu,\sigma^2}$-verteilte Zufallsvariablen mit bekannter Varianz σ^2. Aus der Vorlesung ist bekannt, dass

$$I(X) = I(X_1, \dots, X_n) = \left(\bar{X} - z_{\alpha/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}}, \bar{X} + z_{\alpha/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right)$$

ein Konfidenzintervall für den Erwartungswert μ zur Sicherheit $1 - \alpha$ ist. Dabei bezeichnet $\bar{X}$ den Mittelwert und $z_{\alpha/2}$ das obere $\alpha/2$-Quantil der $\mathcal{N}_{0,1}$-Verteilung $\alpha \in (0, 1)$.

Zeigen Sie, dass für eine beliebige Konstante $\mu_0 \in \mathbb{R}$ durch $T : \mathbb{R}^n \to \{0, 1\}$, $x \mapsto T(x)$ und die Entscheidungsregel

$$T(x) = 1 \iff \mu_0 \notin I(x)$$

ein (zweiseitiger) Test zum Niveau α für die Hypothesen $H_0 : \mu = \mu_0$ vs. $H_1 : \mu \neq \mu_0$ definiert ist. Wie groß können die Fehlerwahrscheinlichkeiten 2. Art höchstens werden?

(bitte wenden)

Aufgabe 24

Bei einer theoretischen Prüfung ist ein Fragebogen mit n Fragen zu bearbeiten. Zu jeder Frage sind a Antworten vorgegeben, von denen genau eine richtig ist. Die Prüfer wollen mit Sicherheit $1 - \alpha$ den Fall ausschließen, dass ein Prüfling besteht, obwohl er nur geraten hat. Definieren Sie für diese Problemstellung ein geeignetes Konfidenzintervall. Zu welcher Schlussfolgerung gelangt man, wenn 11 bzw. 15 von $n = 20$ Fragen beantwortet wurden, pro Frage $a = 3$ Antworten möglich waren und $\alpha = 0.01$ ist? Wie viele Antworten sollten mindestens richtig sein?

Hinweis: Zur konkreten Berechnung der Konfidenzgrenzen kann der Zusammenhang mit der F-Verteilung ausgenutzt werden. Hier ein Auszug der Tabelle der oberen 0.01-Quantile der F_{ν_1,ν_2} Verteilung.

	ν_1					
ν_2	10	12	14	16	18	20
20	3.37	3.23	3.13	3.05	2.99	2.94
22	3.26	3.12	3.02	2.94	2.88	2.83
24	3.17	3.03	2.93	2.85	2.79	2.74
26	3.09	2.96	2.86	2.78	2.72	2.66
28	3.03	2.90	2.79	2.72	2.65	2.60
30	2.98	2.84	2.74	2.66	2.60	2.55

Wiederholungsaufgaben:

Aufgabe 25

Eine Urne enthält 5 weiße und 3 schwarze Kugeln. In einer zweiten Urne liegen 3 weiße und 9 schwarze Kugeln. Zunächst wird ein Würfel gewürfelt. Ist die Augenzahl ≤ 5, so wird anschließend eine Kugel aus der ersten Urne gezogen, andernfalls aus der zweiten. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit eine weiße Kugel zu ziehen?

Aufgabe 26

Es seien $p, q \in (0, 1)$ und $X_1 \sim \mathrm{Ber}_p$, $X_2 \sim \mathrm{Ber}_q$ unabhängige Zufallsvariablen. Bestimmen Sie die Verteilung von $Y := X_1 - X_2$ sowie $Z := X_1 \cdot X_2$.

Aufgabe 27

Sei X Poisson-verteilt mit Parameter $\lambda > 0$. Berechnen Sie $\mathrm{E}[Xe^{\lambda X}]$.

Aufgabe 28

Die gemeinsame Verteilung zweier Zufallsvariablen X und Y wird durch die (gemeinsame) Dichte $f(x,y)$ beschrieben:

a) $f(x,y) = \frac{1}{16} \cdot \mathbb{1}_{(-2,2)^2}(x,y)$

b) $f(x,y) = \frac{1}{8} \left(\mathbb{1}_{(-2,0)^2}(x,y) + \mathbb{1}_{[0,2)^2}(x,y) \right)$

c) $f(x,y) = (1+xy) \cdot \mathbb{1}_{(-\frac{1}{2},\frac{1}{2})^2}(x,y)$

Wie sind in diesen drei Fällen X und Y selbst verteilt? Bestimmen Sie jeweils $\mathrm{E}[X]$ und $\mathrm{E}[Y]$. In welchen Fällen (und warum) sind X und Y stochastisch unabhängig?

Aufgabe 29

Es seien X und Y quadratintegrierbare Zufallsvariablen auf einem Wahrscheinlichkeitsraum (Ω, P). Für alle $\omega_1, \omega_2 \in \Omega$ gelte:

$$X(\omega_1) < X(\omega_2) \;\Rightarrow\; Y(\omega_1) \leq Y(\omega_2).$$

Man zeige, dass X und Y positiv korreliert sind, d.h. $\mathrm{Cov}(X,Y) \geq 0$.

Hinweis: Zeigen Sie zunächst, dass die obige Annahme impliziert, dass $\forall \omega_1, \omega_2 \in \Omega:$

$$(X(\omega_2) - X(\omega_1))(Y(\omega_2) - Y(\omega_1)) \geq 0.$$

Aufgabe 30

Die Zahl der Jungengeburten verhalte sich zur Zahl der Mädchengeburten wie 18 : 17.

a) Berechnen Sie für den Fall von 14000 Geburten mit Hilfe des Satzes von de Moivre-Laplace näherungsweise die Wahrscheinlichkeit, dass darunter mindestens 7037 und höchstens 7363 Jungen sind.

b) Wie groß muss die Zahl der Geburten mindestens sein, damit der Anteil der Mädchen mit einer Wahrscheinlichkeit von mindestens 95% mindestens 15/35 und höchstens 19/35 ist?

Aufgabe 31

Es seien X und X_n, $n \in \mathbb{N}$, integrierbare Zufallsvariablen auf dem Wahrscheinlichkeitsraum $(\Omega, \mathcal{A}, P)$. Zeigen Sie, dass aus

$$\sum_{n=1}^{\infty} \mathrm{E}[|X_n - X|] < \infty$$

folgt, dass X_n P-fast sicher gegen X konvergiert.

(bitte wenden)

Aufgabe 32

Zeigen Sie für eine u.i.v. Stichprobe der Zufallsvariblen X mit $\mathrm{E}[X] = \mu$ und $\mathrm{E}[|X|^3] < \infty$ vom Umfang n, dass

$$\frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(X_i - \bar{X})^2$$

ein erwartungstreuer Varianzschätzer ist. Berechnen Sie außerdem den Erwartungswert von

$$\sum_{i=1}^{n}(X_i - \bar{X})^3$$

und geben Sie dann einen erwartungstreuen Schätzer des 3. zentralen Moments von X an.

Aufgabe 33

Entscheiden Sie, welche der folgenden Aussagen wahr (Begründung!) und welche falsch (Begründung bzw. ein Gegenbeispiel!) sind:

a) Für $n \in \mathbb{N}$ sei S_n binomialverteilt mit Parametern n und $p \in (0,1)$. Dann gilt $S_n/n \xrightarrow{\mathrm{P}} p$.

b) Ist A ein Ereignis mit $\mathrm{P}(A) \in (0,1)$, dann gilt für alle Ereignisse B

$$\mathrm{P}(B|A) + \mathrm{P}(B^c|A^c) = 1.$$

c) Wenn X_1 und X_2 unabhängig und identisch verteilt sind, dann sind $X_1 \cdot X_2$ und X_1^2 identisch verteilt.