Übungen zur Vorlesung
“Stochastik“

Sommersemester 2016, Blatt 2

Abgabetermin: 10.5.2016, zu Beginn der Vorlesung
(Geben Sie auf jedem Lösungsblatt Ihren Namen und Ihre Übungsgruppe an.
Bitte nur maximal zu zweit abgeben.)

Aufgabe 5 (4 Punkte)

Sie haben drei faire 6-seitige Würfel W_1, W_2, W_3, deren Seiten unbeschriftet sind. Gibt es eine Möglichkeit die Würfel derart mit natürlichen Zahlen zu beschriften, dass für ihre jeweiligen Würfelergebnisse $X_1, \ldots, X_3$ gilt

$$\mathrm{P}(X_1 > X_2) > 1/2, \qquad \mathrm{P}(X_2 > X_3) > 1/2 \text{ und } \mathrm{P}(X_3 > X_1) > 1/2?$$

Liefern Sie ein Beispiel oder einen Gegenbeweis.

Aufgabe 6 (4 Punkte)

Es sei Y eine Zufallsvariable mit $Y \geq 0$ und $\mathrm{E}[Y^2] < \infty$. Man beweise: Für $a \leq 1$ gilt

$$\mathrm{P}(Y > a\,\mathrm{E}[Y]) \geq (1-a)^2 \frac{(\mathrm{E}[Y])^2}{\mathrm{E}[Y^2]}.$$

Hinweis:

a) Für alle $t \in \mathbb{R}$ gilt $Y = Y\mathbb{1}_{\{Y>t\}} + Y\mathbb{1}_{\{Y\leq t\}}$. Benutzen Sie die Linearität des Erwartungswertes und wenden Sie dann die Cauchy-Schwarz'sche Ungleichung an.

b) Die Chebyshev-Ungleichung liefert eine obere Schranke für Wahrscheinlichkeiten von Abweichungen vom Erwartungswert. Die hier zu beweisende Ungleichung liefert eine untere Schranke. Sie wird oft mit $a = 0$ verwendet.

Aufgabe 7 (4 Punkte)

Seien $X_1, X_2, \ldots$ unabhängige Zufallsvariablen mit

$$\mathrm{P}(X_n = 1) = p_n \quad \text{und} \quad \mathrm{P}(X_n = 0) = 1 - p_n.$$

a) Zeigen Sie

$$X_n \xrightarrow{\mathrm{P}} 0 \quad \Longleftrightarrow \quad \lim_{n\to\infty} p_n = 0, \tag{1}$$

$$X_n \xrightarrow{\mathcal{L}^p} 0 \quad \Longleftrightarrow \quad \lim_{n\to\infty} p_n = 0, \tag{2}$$

$$X_n \xrightarrow{\text{f.s.}} 0 \quad \Longleftrightarrow \quad \sum_{n=1}^{\infty} p_n < \infty. \tag{3}$$

b) Zeigen Sie mit Hilfe von a), dass aus der Konvergenz in Wahrscheinlichkeit und Konvergenz im p-ten Mittel im Allgemeinen nicht die fast sichere Konvergenz folgt.

(bitte wenden)

Aufgabe 8 (4+2 Punkte)

a) Für jedes $n \in \mathbb{N}$ seien $X_1^{(n)}, \dots, X_n^{(n)}$ paarweise unkorrelierte Zufallsvariablen mit endlicher Varianz (also nicht notwendig identisch verteilt!) und

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n^2} \sum_{i=1}^{n} \mathrm{Var}[X_i^{(n)}] = 0.$$

Zeigen Sie, dass die $X_i^{(n)}$ dem schwachen Gesetz der großen Zahlen genügen, d.h. beweisen Sie

$$\frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} \left(X_i^{(n)} - \mathrm{E}[X_i^{(n)}] \right) \xrightarrow{\mathrm{P}} 0, \quad n \to \infty.$$

b) Es sei $(X_n)_{n\geq 2}$ eine Folge unabhängiger Zufallsvariablen mit

$$\mathrm{P}(X_n = n) = \frac{1}{n \log n} \quad \text{und} \quad \mathrm{P}(X_n = 0) = 1 - \frac{1}{n \log n}.$$

Zeigen Sie: Die Folge genügt dem schwachen Gesetz der großen Zahlen in dem Sinne, dass

$$\frac{1}{n} \sum_{i=2}^{n} (X_i - \mathrm{E}[X_i]) \xrightarrow{\mathrm{P}} 0.$$

Bonus: Wenn Sie zusätzlich zeigen, dass die Folge aus b) *nicht* dem *starken* Gesetz der großen Zahlen genügt, erhalten Sie 2 Bonuspunkte.