Vorlesung: Prof. Dr. Thorsten Schmidt
Übung: Wahid Khosrawi-Sardroudi
http://www.stochastik.uni-freiburg.de/lehre/SS-2016/VorStochIntFinSS2016

Übung 6

Abgabe: 07.06.2016 zu Beginn der Vorlesung.

Zur Erinnerung: Das klassische Black-Scholes Modell (unter Martingalmaß Dynamiken) ist gegeben durch

$$dB = rBdt$$
$$dS = S(rdt + \sigma dW)$$

Aufgabe 1 (4 Punkte)**.** Wir betrachten die Black-Scholes PDE

$$\frac{\partial V}{\partial t} + \frac{1}{2}\sigma^2 S^2 \frac{\partial^2 V}{\partial S^2} + rS\frac{\partial V}{\partial S} - rV = 0$$

mit Randwert $V(S,T) = H(S)$ für eine Payoff Funktion H. Dass heißt $V(S,T)$ ist der Preis im Black Scholes Modell einer Option mit terminaler Auszahlung H zur Maturität H. Ziel dieser Aufgabe ist es die Äquivalenz dieser PDE zu der Wärmeleitungsgleichung

$$\frac{\partial H(x,\tau)}{\partial \tau} = \frac{1}{2}\sigma^2 \frac{\partial^2 H(x,\tau)}{\partial x^2}$$

zu zeigen. Gehen Sie dazu anhand folgender Substitutionsschritte vor:

- $U(S,t) = \exp(r(T-t))V(S,T)$
- $\tau = T - t$
- $\xi = \log S$
- $x = \xi + (r - \frac{1}{2}\sigma^2)\tau$
- $H(x,\tau) = U(S, T-\tau)$.

Beachten Sie nach jeder Substitution auch den korrespondierenden Randwert.

Aufgabe 2 (3 Punkte)**.** Gegeben sei ein klassisches Black-Scholes Modell. Seien ferner $0 < H < K$. Definiere die terminale Auszahlung

$$X(T) = \min(\max(S_T, H), K).$$

Zeichnen Sie das Payoff Diagramm zur Maturität T (S_T gegen X_T) und bestimmen Sie den Preis der Option mit Auszahlung $X(T)$ zum Zeitpunkt $t = 0$. Sie dürfen die Black-Scholes Formel für Put und Call Optionen als gegeben benutzen.

Aufgabe 3 (3 Punkte)**.** Bestimmen Sie den Preis einer cash-or-nothing Option mit Maturität T im Black-Scholes Modell ($t = 0$). Diese hat den Terminalen Payoff

$$X(T) = C\mathbb{1}_{\{S_T > K\}},$$

$C, K > 0$. Zeichnen Sie für $C = K = 1$ das Payoff Diagramm.

Bitte wenden

Aufgabe 4 (1 + 2 + 2 Punkte)**.** Gegeben Sei eine $\mathbb{P}$-Brown'sche Bewegung B mit $B_0 = 0$ auf dem Intervall $[0, T]$. Ferner sei für $b > 0$ die Stoppzeit $\tau_b = \inf\{t \in [0, T] : B_t = b\}$. Wir setzen dabei $\inf \emptyset = \infty$. Definiere den Prozess

$$W_t := \begin{cases} B_t & \text{für } t \leq \tau_b, \\ 2b - B_t & \text{sonst.} \end{cases}$$

Ferner sei

$$M_t := \sup_{s \in [0,t]} B_s.$$

(a) Zeigen Sie: W ist eine Brown'sche Bewegung unter $\mathbb{P}$.

(b) Zeigen Sie: Für $x \geq 0$ und $t \in [0, T]$ gilt

$$\mathbb{P}(B_t \leq b - x, M_t \geq b) = \mathbb{P}(B_t \geq b + x)$$

(c) Zeigen Sie für $t \in (0, T]$, dass der Zufallsvektor (B_t, M_t) die $\mathbb{P}$-Dichte

$$f_{B_t, M_t}(u, v) = \frac{2(2v - u)}{t\sqrt{2t}} \exp\left(-\frac{(2v - u)^2}{2t}\right)$$

hat.