Stochastische Integration und Finanzmathematik SS 2016

Vorlesung: Prof. Dr. Thorsten Schmidt
Übung: Wahid Khosrawi-Sardroudi
http://www.stochastik.uni-freiburg.de/lehre/SS-2016/VorStochIntFinSS2016

Übung 5

Abgabe: 31.05.2016 zu Beginn der Vorlesung.

Aufgabe 1 (8 Punkte)**.** Für eine Folge nichtnegativer Zufallsvariablen $\xi = (\xi_k)_{k\geq 1}$ definieren wir die Mengen $\mathcal{T}_n(\xi) := \mathrm{conv}(\xi_k, k \geq n)$ (konvexe Hülle). Ziel dieser Aufgabe ist es das folgende Theorem zu beweisen.

Theorem 1. Sei ξ eine Folge nichtnegativer Zufallsvariablen. Dann existiert eine Folge η von Zufallsvariablen mit $\eta_n \in \mathcal{T}_n(\xi)$ und eine Zufallsvariable $\eta_\infty \in [0\infty]$ so dass $\eta_k \to \eta_\infty$ f.s. Gilt ferner $\mathcal{T}_1(\xi)$ ist L^∞-beschränkt, so folgt $\eta_\infty < \infty$ f.s.

Gehen sie dabei wie folgt vor:

(a) Zeigen Sie für fixes n, m, dass für jedes $\epsilon > 0$ ein $\delta(\epsilon) > 0$ existiert mit

$$\mathbb{E}\left[e^{-(\eta_n+\eta_m)/2}\right] \leq \frac{\mathbb{E}\left[e^{-\eta_n}\right] + \mathbb{E}\left[e^{-\eta_m}\right]}{2} - \delta(\epsilon)P((\eta_n, \eta_m) \in B_\epsilon),$$

wobei $B_\epsilon = \{(x, y) \in \mathbb{R}_+^2 : |x - y| \geq \epsilon, x \wedge y \leq 1/\epsilon\}$. Dabei soll $\eta_n \in \mathcal{T}_n(\xi)$ eine Folge sein mit der Eigenschaft $\lim_n \mathbb{E}\left[e^{-\eta_n}\right] = \lim_n J_n$, siehe den Hinweis für die Definition von J_n.

Hinweis: Betrachten Sie

$$J_n := \inf_{\eta \in \mathcal{T}_n(\xi)} \mathbb{E}\left[e^{-\eta}\right].$$

Wählen Sie mit dieser Hilfe η_n geschickt.

(b) Zeigen Sie mit Hilfe von (a), dass

$$\lim_{n,m\to\infty} P((\eta_n, \eta_m) \in B_\epsilon) = 0.$$

(c) Folgern Sie die erste Aussage des Theorems.

(d) Folgern Sie die zweite Aussage über $\eta_\infty < \infty$ f.s.

Aufgabe 2 (4 Punkte)**.** Sei $(x_k^n)_{k,n\in\mathbb{N}}$ eine Doppelfolge in einem Hilbertraum $\mathcal{H}$ mit $C_k := \sup_n ||x_k^n|| < \infty$ für alle k. Zeigen Sie dass dann eine Folge $\Lambda^n = (\lambda_j^n)_{0\leq j\leq N_n}$ konvexer Gewichte (summert sich zu eins) existiert so dass

$$y_k^n := \sum_{j=0}^{N_n} \lambda_j^n x_k^{j+n}$$

für gegebenes k in $\mathcal{H}$ konvergiert. *Hinweis: In Hilberträumen haben beschränkte Folgen schwach konvergente Teilfolgen. Wenden Sie den Satz von Mazur an.*

Bitte wenden

Aufgabe 3 (6 Punkte)**.** Beweisen Sie die Burkholder Ungleichung im Zeitstetigen Fall, i.e. für ein nicht negatives Supermartingal S, einer einfachen und vorhersehbaren Strategie H mit $||H_\infty|| \leq 1$ gilt für $a > 0$ die Ungleichung

$$aP(|H \circ S|_1^* \geq a) \leq 9\mathbb{E}\left[S_0\right].$$

Hierbei ist für einen Prozess X

$$|X|_1^* := \sup_{t \leq 1} |X_t|.$$

Hinweis: Betrachten Sie den Prozess $Z = S \wedge a$. Was können Sie über diesen sagen? Schätzen Sie mit Hilfe dieses Prozesses die linke Seite durch zwei Summanden geschickt ab. Beachten Sie die Doob-Meyer Zerlegung für $Z = M - A$. Nutzen Sie die Doob-Ungleichungen unten (Theorem 2 und 3) zusammen mit der elementaren Ungleichung $(u+v)^2 \leq 2(u^2+v^2)$ und dann $\mathbb{E}\left[A_1^2\right] \leq \mathbb{E}\left[M_1^2\right] \leq 2a\mathbb{E}\left[Z_0\right]$. Nutzen Sie auch die Abschätzung

$$Var((H \circ M)_1) \leq \mathbb{E}\left[M_1^2\right].$$

.

***Theorem* 2.** Sei S ein nicht negatives Supermartingal. Es gilt dann für $a > 0$

$$P(|S|_1^* \geq a) \leq \frac{\sup_{t \leq 1} \mathbb{E}\left[S_t\right]}{a}.$$

***Theorem* 3.** Sei S ein Submartingal. Dann gilt für $a > 0$, $p \geq 1$

$$P(|S|_1^* \geq a) \leq \frac{\mathbb{E}\left[|S_0|^p\right]}{a^p}.$$