Stochastische Integration und Finanzmathematik **SS 2016**

Vorlesung: Prof. Dr. Thorsten Schmidt
Übung: Wahid Khosrawi-Sardroudi
http://www.stochastik.uni-freiburg.de/lehre/SS-2016/VorStochIntFinSS2016

Übung 11

Abgabe: 12.07.2016 zu Beginn der Vorlesung.

Aufgabe 1 (4 Punkte)**.** In dieser Aufgabe möchten wir ein Kreditrisiko Modell betrachten in dem Bondpreise einen Sprung haben können. Wir wählen als Startpunkt den HJM Ansatz, modifizieren diesen aber so dass wir annehmen dass ein Bond mit Kreditrisiko modelliert wird durch

$$p(t,T) = \mathbb{1}_{\{\tau > t\}} e^{-\int_t^T f(t,u)du - f(t,t)\mathbb{1}_{\{u \in [t,T]\}}},$$

für einen deterministischen Zeitpunkt $u \in [0,T]$. Zum Beispiel könnte dieser der Zeitpunkt des Brexit Referendums gewesen sein. Gehen Sie davon aus dass f wie in der Vorlesung definiert ist und alle zugehörigen Annahmen erfüllt sind. Leiten Sie die Bedingung her, unter der $\mathbb{P}$ ein Martingalmaß ist. Orientieren Sie sich dabei an den Beweis aus der Vorlesung.

Aufgabe 2 (4 Punkte)**.** Nehmen Sie das Zeitdiskrete "Setting" im Themenblock *amerikanische Optionen* an. Sei Y ein adaptierter Prozess mit $Y_t \in L^1(Q)$ für alle $t \leq T < \infty$, wobei T der endliche Zeithorizont ist. Zeigen Sie dass folgende Punkte äquivalent sind:

(a) Y ist ein Q-Supermartingal

(b) $Y_s \geq \mathbb{E}^Q[Y_t|\mathcal{F}_s]$ für $0 \leq s \leq t \leq T$.

(c) $Y_{t-1} \geq \mathbb{E}^Q[Y_t|\mathcal{F}_{t-1}]$ für $t = 1, \ldots, T$.

(d) $-Y$ ist ein Q-Submartingal.

Aufgabe 3 (4 Punkte)**.** Zeigen Sie, dass Für die Doob-Zerlegung $Y = M - A$ der gestoppte Prozess Y^τ dier Zerlegung

$$Y^\tau = M^\tau - A^\tau$$

hat.

Aufgabe 4 (4 Punkte)**.** Sei M ein adaptierter Prozess mit $M_t \in L^1(Q)$ für alle t. Dann sind die folgenden Bedingungen äquivalent ($\mathcal{F}_0$ ist die triviale σ-Algebra):

(a) M ist ein Q-Martingal

(b) Für jede Stoppzeit τ ist M^τ ein Q-Martingal.

(c) $\mathbb{E}^Q[M_{\tau \wedge T}] = M_0$ für jede Stoppzeit τ.