

Übungen zur Vorlesung „Stochastik für Studierende der Informatik“

<http://www.stochastik.uni-freiburg.de/lehre/SS-2016/VorStochInfoSS2016/InfoVorStochInfoSS2016>

Sommersemester 2016, Blatt 5

Abgabetermin: 30.05.2016, zu Beginn der Vorlesung

(Bitte geben Sie auf jedem Lösungsblatt Ihren Namen und Ihre Übungsgruppe an)

Bitte nur maximal zu zweit abgeben!

Aufgabe 17 (Exponentialverteilung) (3 Punkte)

Für $\lambda > 0$ sei $X \sim \text{Exp}(\lambda)$.

(a) Berechnen Sie $\mathbf{E}[X]$.

(b) Berechnen Sie $\mathbf{Var}[X]$

Aufgabe 18 (Beta-Verteilung) (4 Punkte)

Beweisen Sie Lemma 3.14. Es sei $X \sim \text{Beta}(\alpha, \beta)$. Dann gelten

(a) $\mathbf{E}[X] = \frac{\alpha}{\alpha+\beta}$ und

(b) $\mathbf{Var}[X] = \frac{\alpha\beta}{(\alpha+\beta)^2(\alpha+\beta+1)}$.

Aufgabe 19 (Average-Case-Analyse von FINDMAX) (5 Punkte)

Gegeben sei der Algorithmus FINDMAX aus Aufgabe 8 für den Vektor $(1, \dots, n)$. Berechnen Sie die erwartete Anzahl an Überschreibungen $\max \leftarrow i$ bei zufälligem Input $\underline{X} = (\sigma(1), \dots, \sigma(n))$ für $\sigma \in \mathcal{S}_n$. Berechnen Sie den Erwartungswert für die Anzahl an Überschreibungen.

Hinweis: Definieren Sie, ähnlich wie bei der Average-Case-Analyse von QUICKSORT, eine geeignete Indikator-Zufallsvariable, sodass die Anzahl an Überschreibungen als Summe dieser Zufallsvariablen darstellbar ist.

Aufgabe 20 (Anfragen an Webportal) (4 Punkte)

Die Anzahl X der Anfragen, die stündlich an ein Webportal gestellt werden, sei Poisson-verteilt mit Parameter $\lambda = 3$. Das Webportal kann stündlich bis zu 4 Anfragen bearbeiten. Weitere Anfragen müssen abgewiesen werden.

(a) Welches ist die wahrscheinlichste Anzahl an Anfragen, die innerhalb einer Stunde versuchen, das Webportal zu nutzen, d.h. für welches $i \in \mathbb{N}$ wird die Wahrscheinlichkeit $\mathbf{P}[X = i]$ maximal?

(b) Mit welcher Wahrscheinlichkeit muss in einer beliebigen Stunde mindestens eine Anfrage abgewiesen werden?

(c) Berechnen Sie den Erwartungswert der Anzahl der Anfragen, die stündlich bearbeitet werden.

(d) Berechnen Sie die Varianz der Anzahl der Anfragen, die stündlich bearbeitet werden.