Übungen zur Vorlesung
„Stochastik für Studierende der Informatik“

http://www.stochastik.uni-freiburg.de/lehre/SS-2016/VorStochInfoSS2016/InfoVorStochInfoSS2016

Sommersemester 2016, Blatt 4
Abgabetermin: 23.05.2016, zu Beginn der Vorlesung
(Bitte geben Sie auf jedem Lösungsblatt Ihren Namen und Ihre Übungsgruppe an)
Bitte nur maximal zu zweit abgeben!

Aufgabe 12 (Unabhängigkeit diskreter Zufallsvariablen) (4 Punkte)
Es seien X_1, X_2 zwei diskrete Zufallsvariablen. Beweisen Sie folgende Aussage:
X_1, X_2 sind unabhängig genau dann, wenn für eine beliebe Wahl von x_1, x_2 gilt

$$P(X_1 = x_1, X_2 = x_2) = P(X_1 = x_1)P(X_2 = x_2).$$

Aufgabe 13 (Unabhängigkeit in Permutationen) (4 Punkte)
Sei $\Sigma \in \mathcal{S}_n$. Sind die Ereignisse „i ist Fixpunkt von Σ“ und „j ist Fixpunkt von Σ“ unabhängig voneinander?

Aufgabe 14 (Dichte der Betaverteilung) (4 Punkte)
Beenden Sie den Beweis von Lemma 2.7. Zeigen Sie also, ausgehend von

$$\frac{d}{da}\mathbf{P}(X_{(i)} \geq a) = \sum_{k=0}^{i-1} \binom{n}{k} a^{k-1}(1-a)^{n-k-1}(k(1-a) - (n-k)a),$$

folgende Gleichheit:

$$\mathbf{P}(X_{(i)} \leq a) = \int_0^a \binom{n}{i} i x^{i-1}(1-x)^{n-i} dx.$$

Aufgabe 15 (Zufallszahlen erzeugen) (4 Punkte)

a) In einem Simulationsprogramm wollen Sie exponentialverteilte Zufallsgrößen simulieren. Allerdings stellt der Zufallsgenerator ihres Computers nur auf $[0, 1]$ uniform verteilte Zufallsgrößen bereit. Im folgenden sei U uniform auf $[0, 1]$ verteilt. Bestimmen Sie eine Funktion G, sodass $G_\lambda(U)$ für $\lambda > 0$ eine $\exp(\lambda)$-verteilte Zufallsgröße ist.

b) Seien X, Y unabhängig und exponentialverteilt mit Parameter $\lambda = 1$. Zeigen Sie, dass
$$U = \frac{X}{X+Y}$$
auf $[0, 1]$ uniform verteilt ist.

c) Seien U, V unabhängig und auf $[0,1]$ uniform verteilt. Berechnen Sie die Verteilung von

$$\frac{\ln(U)}{\ln(U \cdot V)}.$$

Bonusaufgabe 16 (Binäre Suche) (4 Extrapunkte)

Gegeben sei eine geordnete Liste L_n mit $2^n - 1$ verschiedenen Elementen. Wir möchten herausfinden, an welcher Stelle ein Element der Liste steht. Wir verwenden den Algorithmus der binären Suche (vgl. Aufgabe 1). Wie viele Schritte benötigt die Suche im Mittel?