Übungen zur Vorlesung „Stochastik für Studierende der Informatik“

http://www.stochastik.uni-freiburg.de/lehre/SS-2016/VorStochInfoSS2016/InfoVorStochInfoSS2016

Sommersemester 2016, Blatt 1
Abgabetermin: 25.04.2016, zu Beginn der Vorlesung
(Bitte geben Sie auf jedem Lösungsblatt Ihren Namen und Ihre Übungsgruppe an)
Bitte nur maximal zu zweit abgeben!

Aufgabe 1 (Beschreiben einer Liste) (4 Punkte)
Es werden k Schlüssel (im Sinne der Informatik) in eine Liste mit n Einträgen geschrieben, wobei $k, n \in \mathbb{N}$ gilt.

(a) Wie viele Möglichkeiten gibt es die Schlüssel in die Liste einzutragen, falls die Schlüssel nicht unterscheidbar sind?

(b) Wie viele Möglichkeiten gibt es die Schlüssel in die Liste einzutragen, falls die Schlüssel unterscheidbar sind?

Aufgabe 2 (User-Accounts) (4 Punkte)
Ein Systemadministrator vergibt Nutzernamen und Passwörter auf zufällige Art und Weise. Hierfür stehen ihm die 26 Buchstaben des Alphabets (mit Groß- und Kleinschreibung), die 10 Ziffern $0, ..., 9$ und insgesamt 8 verschiedene Sonderzeichen zur Verfügung. Berechnen Sie die Anzahl der Möglichkeiten für folgende Verteilungsregeln:

(a) Wie viele mögliche Nutzernamen der Länge 5 gibt es, falls hierfür nur Buchstaben und Ziffern erlaubt sind, keine Ziffer vor einem Buchstaben vorkommen darf und immer mindestens ein Buchstabe und eine Ziffer vorkommen muss?

(b) Wie viele mögliche Passwörter der Länge 5 gibt es zu einem bestimmten Nutzernamen, falls mindestens ein Sonderzeichen vorkommen muss und zusätzlich die ersten drei Zeichen verschieden von denen des Nutzernamens sein sollen? (Kleine Buchstaben werden von großen Buchstaben unterschieden)

(c) Wie viele Paare (Nutzername, Passwort) gibt es insgesamt?

Aufgabe 3 (Stirling-Zahlen 2. Art) (4 + 1 + 2 + 1 Punkte)

Sei L eine n-elementige Liste ($n \in \mathbb{N}$). Gesucht ist die Anzahl $S_{n,k}$ an Partitionen dieser n Elemente in k disjunkte und nicht-leere Mengen ($k \leq n$). Bspw. besteht $S_{3,2}$ von $\{1,2,3\}$ aus folgenden Elementen:

$$\{1\}\{2,3\}; \{2\}\{1,3\}; \{3\}\{1,2\}.$$

Also ist $S_{3,2} = 3$.

(a) Leiten Sie folgende Rekursion kombinatorisch her ($n, k > 0$):

$$S_{n,k} = S_{n-1,k-1} + kS_{n-1,k}.$$

(b) Zeigen Sie:

$$S_{n,k} = \sum_{i=1}^{k} (-1)^{k-i} \frac{i^n}{i!(k-i)!}$$

Gehen Sie dabei wie folgt vor:

(i) Sei $A_k(x) = \sum_{n=1}^{\infty} S_{n,k} x^n$ für $x \in (0,1)$. Zeigen Sie:

$$A_k(x) = \frac{x^k}{(1-x)(1-2x)\cdots(1-kx)}.$$

(ii) Folgern Sie mit Hilfe der Partialbruchzerlegung:

$$\frac{1}{(1-x)(1-2x)\cdots(1-kx)} = \sum_{i=1}^{k} (-1)^{k-i} \frac{i^{k-1}}{(i-1)!(k-i)!} \frac{1}{(1-ix)}.$$

(iii) Zeigen Sie nun die Behauptung.

(Sie dürfen ohne Beweis verwenden, dass $\sum_{i=0}^{\infty}(kx)^i = \frac{1}{1-kx}$ für $x < 1/k$ gilt.)